

1 Ein Blick in den Nachthimmel

Blicken wir in einer wolkenlosen Nacht, weit entfernt von künstlichen Lichtquellen zum Himmel, so sehen wir Sterne. Diese simple, allnächtliche Beobachtung scheint uns fast zu trivial zu sein, um darüber weiter nachzudenken, aber tatsächlich ist der Nachthimmel aus vielerlei Perspektive ein absolutes Rätsel. Vergessen wir zunächst die lange unbekannte Natur der Sterne, oder die Planetenbewegungen, und konzentrieren wir uns auf das allereinfachste: Warum gibt es diese Lichtpunkte auf einem dunklen Hintergrund?

Das diese so einfache Frage alles andere als einfach ist, sehen Sie, wenn Sie daran denken, was Sie im ersten Abschnitt des Kurses (der statistischen Mechanik) gelernt haben: Gleichmässig verteilte Objekte (Moleküle) sind am Wahrscheinlichsten. Nun ist es natürlich so, dass die Sterne nicht gleichmässig verteilt sind (denken Sie an die Milchstrasse!), aber davon sprechen wir hier nicht. Warum gibt es Sterne und zwischen ihnen so viel Zwischenräume? Warum ist die Materie nicht gleichmässig über den ganzen Himmel verteilt (wie sie es während der ersten 400.000 Jahre des Universums war)? Das ist die erste Frage, mit der wir uns beschäftigen wollen.

2 Instabilität einer Gaswolke

Beginnen wir mit einer Gaswolke, die es zwischen den Sternen zur Genüge in unserem Universum gibt. Die Bewegungsenergie der Moleküle in der Gaswolke kann sich von Molekül zu Molekül deutlich unterscheiden, aber die mittlere kinetische Energie ist (bis auf auf einen Faktor 2 und die Naturkonstante k_B , die wir Theoretiker immer auf 1 setzen, was einfach bedeutet, dass wir Temperaturen in Einheiten der Energie messen) gleich der Temperatur. Wie Sie wissen ist die kinetische Energie bei der Bewegung in eine Richtung

$$E_{\text{kin},1D} = \frac{1}{2}mv^2$$

und die Temperatur ist entsprechend als

$$T = 2\langle E_{\text{kin},1D} \rangle = m \langle v^2 \rangle$$

wobei die spitzen Klammern den Erwartungswert anzeigen. Führen wir nun die quadratisch gemittelte Geschwindigkeit in einer Dimension $v_{1D}^2 = \langle v^2 \rangle$ ein um leichter rechnen zu können. Da wir 3 Raumrichtungen haben, in die sich das Molekül bewegen kann, ist die mittlere kinetische Energie

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2}mv_{1D}^2 = \frac{1}{2}mv_{3D}^2$$

mit der mittleren Geschwindigkeit in 3 Dimensionen

$$v_{3D}^2 = v_{1D}^2$$

da sich die Quadrate der Geschwindigkeiten laut Pythagoras addieren. Die Temperatur ist daher in 3 Dimensionen

$$T = mv_{1D}^2 = \frac{2}{3}\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{3}mv_{3D}^2 \quad (1)$$

Betrachten wir nun ein wirklich durchschnittliches Molekül, das sich genau mit der durchschnittlichen Geschwindigkeit $v_D = v_{3D}$ bewegt. Wenn wir (1) nach v_D auflösen, erhalten wir

$$v_D = \sqrt{\frac{3T}{m}} \quad (2)$$

In einer relativ kleinen Wolke würde dieses Molekül eine Zeit lang ungestört mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus weiterfliegen, bis es irgendwann an ein anderes Molekül stösst (die durchschnittliche Strecke nennt man die freie Weglänge). Bei einem solchen Stoss würde es etwas Energie abgeben oder aufnehmen, aber im Durchschnitt würde nichts geschehen, ausser dass sich immer wieder die Richtung ändert. Wäre die Wolke in einem Behälter eingesperrt, würden manche Moleküle an die Wände des Behälters stossen und auf diese einen Druck ausüben. Zwischen den Sternen aber gibt es keine Wände und ein Molekül, das den Rand der Wolke erreicht, würde einfach weiterfliegen und der Wolke entkommen, bzw. diese vergrössern und ausdünnen. Das alles gilt wie gesagt dann, wenn es ausser den Stössen zwischen den Molekülen keine weiteren Kräfte gibt. Doch wenn genügend Moleküle vorhanden sind, so gibt es eine weitere Kraft, die wir berücksichtigen müssen: die Schwerkraft.

Stellen wir uns nun der Einfachheit halber vor, unsere Gaswolke wäre kugelförmig¹ mit Radius R und Gesamtmasse M . Betrachten wir ein Gasmolekül und fragen uns, würde es dieses Molekül überhaupt schaffen, der Wolke zu entfliehen, wenn es an kein anderes Molekül mehr stösst? Die Antwort auf diese Frage hängt offensichtlich von der Anfangsgeschwindigkeit des Moleküls ab. Ist sie gross genug, größer als die Fluchtgeschwindigkeit v_F , so wird das gelingen, ansonsten nicht. Berechnen wir nun diese Fluchtgeschwindigkeit für ein Molekül an der Oberfläche der Wolke. Bei einer Geschwindigkeit v ist dessen kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$$

Um aus der Wolke zu entkommen, muss das Molekül die Gravitationsenergie

$$E_{\text{pot}} = \frac{G M m}{R}$$

überwinden. Die Fluchtgeschwindigkeit ist genau dann erreicht, wenn wir genügend kinetische Energie dazu haben, also wenn

$$\frac{1}{2} m v_F^2 = \frac{G M m}{R}$$

womit

$$v_F = \sqrt{\frac{2 G M}{R}} \quad (3)$$

Damit haben wir nun zwei charakteristische Geschwindigkeiten: die durchschnittliche Geschwindigkeit eines Moleküls v_D , die direkt mit der Temperatur zusammenhängt und die Fluchtgeschwindigkeit v_F . Immer wenn es zwei solche Größen gibt, die ein System charakterisieren, kann man davon ausgehen, dass sich das System deutlich anders verhalten wird, wenn jeweils eine der beiden größer ist. Auch hier ist das nicht anders: Wenn die Fluchtgeschwindigkeit kleiner ist als die Durchschnittsgeschwindigkeit, so werden Moleküle der Wolke entkommen können und die Wolke kann ausgedünnt werden und sich vergrößern. Ist aber die Fluchtgeschwindigkeit größer als die Durchschnittsgeschwindigkeit, so kann fast kein Molekül entkommen. Ist die Fluchtgeschwindigkeit tatsächlich wesentlich größer als die Durchschnittsgeschwindigkeit, so schaffen es Moleküle aus dem Inneren der Wolke meist nicht einmal mehr bis zum Rand und die Wolke kontrahiert, was ihre Fluchtgeschwindigkeit, laut (3) weiter vergrößert. Die Wolke wird also weiter kontrahieren und sie wird das so lange tun, bis es eine neue Kraft gibt, die sich dieser Kontraktion entgegenstellt. Aus (2) und (3) sehen wir, dass das geschieht, wenn

$$\frac{G M}{R} > \frac{3 T}{m}$$

oder

$$R < \frac{m}{3 T} G M$$

¹. Wir Theoretiker lieben solche Vereinfachungen, weil sie das Problem auf das Wesentliche reduzieren und all die unnötig komplizierten Rechnungen beseitigen, die man machen muss, wenn man ein etwas realistischeres System betrachtet.

Die kritische Größe

$$R_J = \frac{m}{3T} G M \quad (4)$$

ist auch als Jeans-Radius bekannt (benannt nach James Jeans, der sie 1902 einführte). Wie man sieht, hängt sie direkt von der Masse ab, was bedeutet, dass man in einen gegebenen Radius bei einer gegebenen Temperatur nur eine bestimmte Masse an Molekülen packen kann, bevor diese sich beginnen unter ihrer eigenen Schwerkraft zusammenzuziehen. Weiters ist interessant, dass der Radius linear von der Masse abhängt. Stellen Sie sich vor, sie vergrößern den Radius einer Wolke auf das doppelte, wobei sie aber die Dichte konstant halten.² Da das Volumen um den Faktor 8 zunimmt, wird sich auch die Masse, und damit der Jeansradius verachtfachen. Wenn Sie bei gleicher Dichte eine Wolke immer größer machen, wird sie irgendwann kollabieren. Und das ist letztlich der Grund, warum wir einen Nachthimmel mit grossen Leerräumen und dazwischen einzelnen Sternen sehen: Wenn Materie grossräumig gleich verteilt ist, wird sie unter der Gravitation instabil und kollabiert.

3 Der Abstand zwischen den Sternen

Mit dem Jeans-Radius verstehen wir nun grundsätzlich, wie Sterne sich aus einer Gaswolke bilden können. Versuchen wir als nächstes abzuschätzen, wie gross diese Gaswolke für die Sonne gewesen sein muss. Dazu tun wir das, was Theoretiker in so einer Situation immer versuchen: Den Ausdruck (auf der rechten Seite der Gleichung) so zu zerlegen, das man die Einzelteile physikalisch verstehen kann. Das kann man auf verschiedene Weise machen um verschiedene Zusammenhänge daraus zu lernen; wir machen es zunächst so, dass wir drei Teile identifizieren. Als ersten Teil nehmen wir $m/(3T)$, wobei m die Masse eines Moleküls und T die Temperatur ist. Aus (1) sehen wir, dass

$$\frac{3T}{m} = v_D^2 \quad (5)$$

nichts anderes ist als die durchschnittliche Geschwindigkeit der Moleküle zum Quadrat. Der zweite Teil ist GM , also die Masse der Gaswolke M multipliziert mit der Gravitationskonstanten G . Die Masse der Gaswolke, aus der ein Stern entsteht sollte ungefähr der Masse entsprechen, die der Stern danach besitzt. Im Falle unserer Sonne wäre das die Sonnenmasse $M_\odot$. Nun kennen Sie vielleicht die Masse der Sonne in Kilogramm, aber wir wollen in Einheiten rechnen, die für Sterne vernünftig sind, und da ist ein kg keine besonders gute Einheit - eine Sonnenmasse ist da schon viel besser. Auch wollen wir letztlich eine Länge ausrechnen - den Jeansradius - und interessanterweise gibt uns die Kombination aus Gravitationskonstante G und Masse M , wenn wir sie noch mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit versehen, tatsächlich eine Länge, den sogenannten Schwarzschildradius

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} \quad (6)$$

Der Schwarzschildradius der Sonne $r_{s\odot}$ ist ca. 3km (etwas genauer 2.95km). Physikalisch hat der Schwarzschildradius auch eine Bedeutung, die hier allerdings nicht wichtig ist: Wäre die Sonne so klein (und würde sie sich nicht drehen), dann wäre sie ein schwarzes Loch. Die Fluchtgeschwindigkeit (3) wäre dann die Lichtgeschwindigkeit, also

$$c = \sqrt{\frac{2GM}{r_s}}$$

was, wie Sie sehen, durch quadrieren und umstellen genau die Beziehung (6) ergibt. Lösen wir die Beziehung nach GM auf

$$GM = \frac{r_s c^2}{2}$$

2. Auch das ist eine der schönen Seiten der Theorie: wir können einfach Dinge annehmen, die unmöglich zu realisieren sind.

und setzen sie in den Ausdruck für den Jeansradius (4) ein, so finden wir

$$R_J = \frac{mc^2}{3T} r_s \quad (7)$$

oder, mit dem Ergebnis des ersten Teils (5)

$$R_J = \frac{c^2}{v_D^2} r_s = \frac{r_s}{\left(\frac{v_D}{c}\right)^2}$$

Der Ausdruck v_D/c ist dabei die durchschnittliche Geschwindigkeit der Gasmoleküle als Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit. Da Gasmoleküle typischerweise sehr viel langsamer unterwegs sind als mit Lichtgeschwindigkeit wird der Jeansradius viel größer sein als der Schwarzschildradius - die Frage ist, um wieviel. Um das abzuschätzen kommen wir zurück zur Form (7) und betrachten den Ausdruck im Bruch. Zunächst stellen wir fest, dass α einfach eine Zahl ist, die nicht sehr verschieden von 1 ist. Um eine Abschätzung zu bekommen deren Größenordnung richtig ist, setzen wir sie daher einfach auf 1. Was uns dann bleibt ist ein Faktor mc^2 im Zähler und ein Faktor $6T$ im Nenner. Wie Sie vielleicht wissen ist mc^2 eine Energie (nämlich die Ruheenergie die laut spezieller Relativitätstheorie zu einer Masse m gehört, obwohl wir diese Tatsache hier nicht benötigen) und auch die Temperatur können wir, wie wir gesehen haben, in Einheiten der Energie schreiben. Am günstigsten stellt es sich hier heraus, als Energieeinheit das Elektronvolt (eV) zu nutzen, das sie vielleicht schon kennen. Temperaturen (absolute Temperaturen in Kelvin) kann man relativ leicht in eV umrechnen, wobei

$$10\text{K} \sim 1\text{meV}$$

sind. Der genaue Umrechnungsfaktor (die sogenannte Boltzmannkonstante k_B) beträgt

$$k_B \sim 8.617333262 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{K}}$$

aber so genau benötigen wir ihn nicht. Für uns ist nur wichtig, dass das kalte, interstellare Gas ungefähr die eine Temperatur von 10K also, in Energieeinheiten, $T \sim 1\text{meV}$ besitzt. Das Gas selbst besteht vor allem aus Wasserstoffmolekülen, also H_2 . Hier können wir verwenden, dass die Masse von Protonen und Neutronen, ausgedrückt in Energieeinheiten $m_{p/n}c^2 \sim 1\text{GeV}$ beträgt. Auch hier gibt es einen genaueren Wert ($m_{p/n}c^2 \sim 0.94\text{GeV}$) den wir aber so genau für unsere Abschätzung ebenfalls nicht benötigen. Wir finden also, dass für kaltes, interstellares Gas

$$\frac{mc^2}{T} \sim \frac{2\text{GeV}}{1\text{meV}} = 2 \times 10^{12}$$

und damit

$$R_J = \frac{mc^2}{3T} r_s \sim \frac{2}{3} \times 10^{12} r_s \quad (8)$$

Für eine Sonnenmasse ergibt sich damit

$$R_{J\odot} \sim 2 \times 10^{12} \text{km}$$

Der Jeansradius der Sonne ist also ungefähr zwei Billionen km, was wesentlich größer ist als der Abstand Erde Sonne (die sogenannte astronomische Einheit oder AE), die ca. 150 Millionen km beträgt. Aber km oder auch AE sind, wenn es um den Abstand zwischen Sternen geht, keine vernünftige Einheit. Typischerweise verwenden wir Lichtjahre oder parsec. Die Umrechnung zwischen Lichtjahr und km ist relativ einfach wenn man weiss, dass Licht in einer Sekunde ca. 300000 km zurücklegt, der Tag $24 \times 3600 = 86400$ Sekunden und das Jahr ca. 365 Tge hat. Zusammen ergibt das

$$1\text{ly} \sim 365 \times 86400 \times 3 \times 10^5 \text{km} \sim 10^{13} \text{km}$$

womit wir sehen, dass der Jeansradius der Sonne $R_{J\odot} \sim 0.2 \text{ ly}$ ungefähr ein fünftel Lichtjahr beträgt. Das ist in der selben Größenordnung wie der Abstand zwischen Sternen - in Sonnennähe ist der durchschnittliche Sternenabstand ca. 6 ly - aber doch um einen Faktor kleiner. Aus dieser simplen Tatsache lassen sich schon einige interessante Schlüsse ziehen. Natürlich könnte es theoretisch sein, dass sich unsere Sonne aus einer Gaswolke mit genau einer Sonnenmasse entwickelt hat, die durch irgendeinen äusseren Einfluss komprimiert wurde. Sehr wahrscheinlich ist ds aber nicht, da sich so eine Wolke, wenn sie von Vakuum umgeben ist - relativ schnell auflösen würde. Hat sich unsere Sonne allerdings, was wesentlich plausibler ist, aus einem Teil einer größeren Wolke entwickelt, so wäre es natürlich anzunehmen, dass sich in einer solchen Wolke im Abstand von $\sim 0.2 \text{ ly}$ weitere Sterne entwickelt haben könnten - die "Geschwister" unserer Sonne. In den knapp 5 Milliarden Jahren der Existenz der Sonne haben sich dann diese Geschwister getrennt und aus einer relativ sterndichten Geburtsumgebung in den Rest der Milchstrasse verstreut. Wäre das ein typisches Sternenschicksal, so müssten wir erwarten, dass Geburtsregionen von Sternen gibt, in denen es Gaswolken gibt und die Sterne dichter sind als in Sonnenumgebung.

4 Sterne haben viele Geschwister

Um zu sehen, ob unsere Vermutung vernünftig ist, dass Sterne in Geburtsregionen mit vielen Geschwistern entstehen, können wir noch einmal den Jeansradius betrachten. Beginnen wir mit der Form (8)

$$R_J \sim \frac{2}{3} r_s 10^{12}$$

und versuchen wir, alles in vernünftigen Einheiten - also Lichtjahren und Sonnenmassen - auszudrücken. Wenn wir die allgemeine Beziehung (6) zwischen Schwarzschildradius und Masse durch die selbe Beziehung für die Sonne dividieren (also jeweils die rechten und linken Seiten), so erhalten wir

$$\frac{r_s}{r_{s\odot}} = \frac{M}{M_\odot}$$

oder

$$r_s = 3 \text{ km} \frac{M}{M_\odot}$$

Damit ist der Jeansradius einer Gaswolke

$$R_J \sim \frac{M}{M_\odot} 10^{12} \text{ km} = \frac{1}{5} \text{ jy} \frac{M}{M_\odot}$$

Wir schreiben diese Beziehung in der Form

$$R_J[\text{ly}] \sim \frac{1}{5} M[M_\odot] \quad (9)$$

wobei die eckige Klammer eigentlich nur eine Division darstellt, aber praktisch ist, da wir die Einheiten nicht immer mit herumschleppen müssen. Was uns nun interessiert ist aber nicht, wie klein die Ausdehnung der Wolke bei gegebener Masse sein kann, bevor sie kontrahiert, sondern wie gross die Wolke sein muss, damit sie beginnt zu kontrahieren, wenn wir die typische Dichte des interstellaren Mediums voraussetzen. Die Masse M ist bei dieser Betrachtung nicht konstant, sondern das Produkt aus dem Volumen der Wolke, die wir der Einfachheit halber als kugelförmig annehmen

$$V = \frac{4}{3} \pi R_J^3$$

und der Dichte ρ . In Einheiten von Sonnenmassen und Lichtjahren ausgedrückt finden wir dann

$$M[M_\odot] \equiv \frac{M}{M_\odot} = \frac{V\rho}{M_\odot} = \frac{4}{3}\pi R_J^3 \frac{\rho}{M_\odot} = \frac{4}{3}\pi \frac{R_J^3}{\text{ly}^3} \frac{\rho}{\frac{M_\odot}{\text{ly}^3}} = \frac{4}{3}\pi (R_J[\text{ly}])^3 \rho \left[\frac{M_\odot}{\text{ly}^3} \right]$$

womit wir aus der Beziehung (9)

$$R_J[\text{ly}] \sim \frac{1}{5} \frac{4}{3} \pi (R_J[\text{ly}])^3 \rho \left[\frac{M_\odot}{\text{ly}^3} \right] \sim \frac{4}{5} (R_J[\text{ly}])^3 \rho \left[\frac{M_\odot}{\text{ly}^3} \right]$$

finden. Wir können ein $R_J[\text{ly}]$ kürzen und die Wurzel ziehen, um das Resultat

$$R_J[\text{ly}] \sim \frac{1.1}{\sqrt{\rho \left[\frac{M_\odot}{\text{ly}^3} \right]}}$$

zu erhalten. Mithilfe von (9) können wir aus dem Resultat für den Jeansradius auch die Jeansmasse

$$M[M_\odot] \sim \frac{5.5}{\sqrt{\rho \left[\frac{M_\odot}{\text{ly}^3} \right]}}$$

erhalten. Um abzuschätzen, wie viele Sterne gleichzeitig entstehen, müssen wir noch die Dichte des interstellaren Mediums ρ kennen. Ganz grob können wir die Gasdichte abschätzen, indem wir annehmen, dass sie ungefähr der Sternendichte entspricht (da die Sterne ja aus den Gaswolken entstanden sind). Mit einer mittleren Sternentfernung von $\sim 6\text{ly}$ und der einfachen Annahme, dass die durchschnittliche Sternmasse gleich der Sonnenmasse ist, erhalten wir daraus eine Dichte

$$\rho \left[\frac{M_\odot}{\text{ly}^3} \right] \sim \frac{1}{6^3} \sim 0.005$$

und damit eine Jeansmasse von

$$M_J[M_\odot] \sim 5.5 \sqrt{216} \sim 80$$

Diese grobe Abschätzung sagt uns, dass interstellare Staubwolken dann Sterne zu formen beginnen, wenn sie um die hundert Sonnenmassen enthalten - eine genauere Rechnung zeigt, dass die benötigte Masse sogar noch um einiges größer ist. Die grosse Wolke kontrahiert, einige kleinere Regionen werden schneller dichter und bilden schliesslich Sterne von ungefähr Sonnenmasse. So funktioniert, in groben Zügen, der Anfang der Sternentstehung in Galaxien wie unserer.

5 Ein Stern entsteht

Wir wissen nun also, dass interstellare Staubwolken ab einer gewissen Masse und Größe (oder Dichte und Temperatur) beginnen, sich unter ihrer eigenen Schwerkraft zusammenzuziehen. Wie sich aus dieser kontrahierenden Staubwolke ein Stern bildet ist im Detail recht kompliziert und auch noch nicht ganz verstanden, aber einige grundlegende Dinge können wir auch mit unserer elementaren Betrachtung schon verstehen. Da wäre zunächst die Frage, was mit dem Gas geschieht, das kontrahiert. Natürlich wird es durch diese Kontraktion dichter - aber es passiert noch etwas: ein Gasmolekül, das aus weiter Entfernung nach innen stürzt wird kinetische Energie gewinnen. Diese kinetische Energie kommt natürlich aus der Gravitationsenergie, also können wir wieder $E_{\text{kin}} = E_{\text{pot}}$ ansetzen, also

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{G M m}{R}$$

und wieder können wir daraus die Beziehung

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

finden, was natürlich genau der Fluchtgeschwindigkeit entspricht. (Die Fluchtgeschwindigkeit benötigt man, um dem Gravitationsfeld zu entkommen - umgekehrt gewinnt man natürlich genau die Geschwindigkeit, wenn man ins Gravitationsfeld stürzt, vorausgesetzt man hat sich davor noch nicht bewegt). Wir können aus der Beziehung nun ablesen, wie gross die Geschwindigkeit eines Wasserstoffmoleküls ist, wenn es am Rande der Wolke bis auf den Radius R gefallen ist. Nehmen wir zunächst ganz einfach an, dass sich der Stern (unsere Sonne) schon gebildet hat, dass also der Radius $R_{\odot} \sim 700.000\text{km}$ der Sonnenradius ist. Über den Umweg des inzwischen gut bekannten Schwarzschildradius der Sonne $r_{S\odot} \sim 3\text{km}$ können wir die erreichte Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2GM_{\odot}}{R_{\odot}}} = \sqrt{\frac{r_{S\odot}}{R_{\odot}}}c \sim \sqrt{\frac{3\text{km}}{7 \times 10^5\text{km}}} 3 \times 10^5 \frac{\text{km}}{\text{s}} \sim 600 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

berechnen, die, wie wir sehen, ganz beachtlich ist. Laut (1) hat Wasserstoffgas mit einer solchen Durchschnittsgeschwindigkeit eine Temperatur von

$$T = \frac{1}{3}m_{H_2}v^2 = \frac{1}{3}m_{H_2}c^2 \frac{r_{S\odot}}{R_{\odot}} \sim \frac{2\text{GeV}}{3} \frac{3\text{km}}{7 \times 10^5\text{km}} \sim 3\text{keV}$$

oder, mit der Boltzmannkonstanten umgerechnet, 30 Millionen Kelvin entspricht. Aus dieser simplen Betrachtung können wir aber nicht schliessen, dass die Sonne so heiss ist - dazu haben wir zu viele Dinge vernachlässigt. Ganz offensichtlich ist es so, dass ein Molekül am Rande der Gaswolke nicht einfach im freien Fall ist, bis es an die Oberfläche des fertig geformten Sterns trifft. Es wird mit anderen Molekülen stossen, dabei Energie aufnehmen oder verlieren und, wenn der Stoss (durch genügend hohe Temperatur und damit Geschwindigkeit) hart genug ist, sich auch in seine Bestandteile zerlegen. Das sind zunächst die beiden Wasserstoffatome aus denen es besteht und danach sogar das Elektron und das Proton jedes der Atome. Wenn das passiert haben wir es nicht mehr mit einem Gas zu tun, sondern mit einem Plasma (das wie ein Gas ist, dessen Teilchen aber elektrisch geladen sind). Weil ein Molekül den Fall nicht unzertrümmert, müssen wir unsere Rechnung nun auf jeden Fall anpassen. Die erreichte Geschwindigkeit stimmt nach wie vor - für die Umrechnung in eine Temperatur dürfen wir aber nicht mehr die Masse des Wasserstoffmoleküls ($\sim 2\text{GeV}$) verwenden, sondern müssen stattdessen die Masse des Wasserstoffatoms oder des Protons (beide $\sim 1\text{GeV}$) bzw. des Elektrons ($\sim 500\text{keV}$) verwenden. Damit ergibt sich

$$T_H \sim T_p \sim \frac{1\text{GeV}}{3} \frac{3\text{km}}{7 \times 10^5\text{km}} \sim 1.5\text{keV}$$

oder ca. 15 Millionen Kelvin für Wasserstoff bzw. ein Proton und

$$T_e \sim \frac{500\text{keV}}{3} \frac{3\text{km}}{7 \times 10^5\text{km}} \sim 0.7\text{eV}$$

oder 7000 Kelvin für ein Elektron. Natürlich ist es nicht so, dass Protonen und Elektronen eine verschiedene Temperatur haben - wenn sie oft miteinander stossen gleicht sich ihre Temperatur aus. Auch ist die Annahme, dass Teilchen sozusagen im freien Fall bis zur schon gebildeten Sternoberfläche fällt völlig absurd, die Abschätzung zeigt aber trotzdem, welche Temperaturen bei einem solchen Prozess erreicht werden können.³ 15 Millionen Kelvin entsprechen ziemlich genau der Kerntemperatur unserer Sonne. Bei so hohen Temperaturen kommen sich Protonen genügend

3. Hinter dieser groben Abschätzung verbirgt sich das so genannte Virialtheorem - ein Naturgesetz, dass im Wesentlichen besagt, dass die Bewegungsenergie eines Objekts im Gravitationsfeld gleich der Hälfte seiner gravitativen Bindungsenergie ist.

oft so nahe damit die die starke Kernkraft (die anziehend wirkt und Atomkerne bindet) die elektrische Abstoßung der Protonen überwinden kann. Diesen Prozess nennt man Kernfusion und er setzt relativ viel Energie frei (ungefähr acht Prozent der Protonmasse!), der die hohe Temperatur wiederum aufrecht erhalten kann.

6 Ein Stern leuchtet

Bisher haben wir einen Stern einfach nur als eine sich durch ihre Schwerkraft verdichtende Gaswolke betrachtet und die wichtigste Eigenschaft völlig ausser Acht gelassen, mit der man einen Stern normalerweise assoziiert: Sterne leuchten. Warum sie das tun können wir aufgrund unserer bisherigen Überlegungen schon sehr schön sehen: Durch ihre Entstehung werden Sterne in ihrem Inneren sehr heiss. Und heisse Objekte leuchten. Doch warum leuchten heisse Objekte?

Beginnen wir zunächst damit festzustellen, dass Licht aus Teilchen besteht - den sogenannten Photonen. Diese Teilchen besitzen, genau so wie Wasserstoffatome, Elektronen oder Protonen, Bewegungsenergie. Im Unterschied zu üblichen Teilchen, wie Wasserstoffatomen, Elektronen und Protonen, besitzen Photonen aber keine Ruheenergie mc^2 (sie sind in diesem Sinne Masselos), ihre gesamte Energie ist Bewegungsenergie. Und dieser kleine Unterschied hat ganz erhebliche Auswirkungen darauf, wie Energie und Temperatur für Photonen zusammenhängen.

Denken wir nochmal zurück an die Temperatur von Gasmolekülen, die wir einfach als zwei mal die durchschnittliche Bewegungsenergie entlang einer Dimension seine Bewegungsenergie entlang einer Dimension

$$T = 2\langle E_{\text{kin},1D} \rangle \quad (10)$$

definiert hatten. Für Gasmoleküle in 3 Dimensionen hatte das bedeutet, dass ihre durchschnittliche Bewegungsenergie in allen drei Dimensionen drei mal der durchschnittlichen Bewegungsenergie in einer Dimension

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = 3\langle E_{\text{kin},1D} \rangle = \frac{3}{2}T \quad (11)$$

also immer noch proportional der Temperatur ist. Ganz entscheidend für diesen Zusammenhang ist eine Tatsache, die für normale Gase so selbstverständlich ist, dass wir sie niemals wirklich ansprechen müssen: die Anzahl der Teilchen ist fix. Gasmoleküle können nicht einfach entstehen und verschwinden, was wir als selbstverständlich annehmen. Doch ist das wirklich immer so?

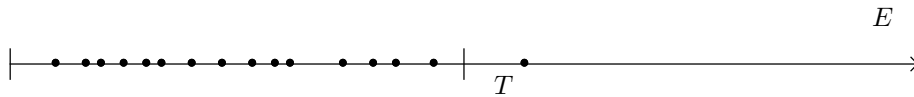
Dass wir im täglichen Leben Gasmoleküle - oder jede beliebige andere Materie - nicht einfach entstehen und wieder verschwinden sehen liegt im Grunde daran, dass die Ruheenergie mc^2 so riesengross ist im Vergleich zur Bewegungsenergie $mv^2/2$. Typische Geschwindigkeiten v sind viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c , weshalb nie genügend Energie vorhanden ist, neue Teilchen entstehen zu lassen. Für Photonen, also für Licht, ist das ganz anders. Da Licht keine Ruheenergie besitzt, gibt es kein Hindernis ein neues Photon zu produzieren, wenn genügend Energie vorhanden ist. Das wiederum ändert den Zusammenhang zwischen durchschnittlicher kinetischer Energie und Temperatur ganz grundlegend.

Um das zu sehen betrachten wir zunächst ein gewöhnliches Gas, das aus n Teilchen besteht. Laut (11) ist die *Gesamtenergie* des Gases

$$E_{\text{Gas}} = \frac{3}{2}Tn \quad (12)$$

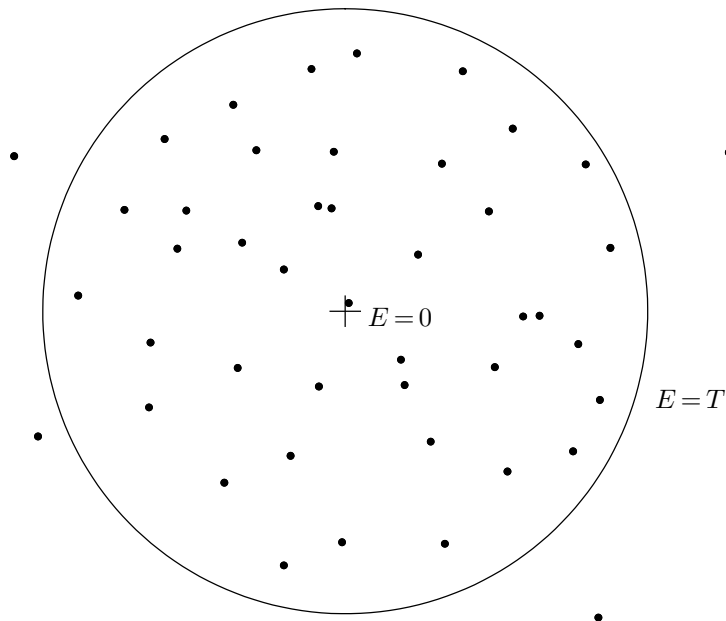
Erhöhen wir nun die Gesamtenergie des Gases, so sehen wir, dass die Temperatur sich proportional zur Energie erhöht da die Teilchenzahl n konstant ist. Bei Photonen ist das nun ganz anders, denn ihre Anzahl ist nicht konstant. Stecken wir zusätzlich Energie in das Photonengas, so kann damit entweder ein schon existierendes Photon mehr Energie bekommen, oder ein neues (oder mehrere neue) entstehen. Ganz offensichtlich gibt es bei höherer Energie (oder Temperatur) mehr Photonen - aber wieviele?

Wir haben die Temperatur als zwei mal die durchschnittliche Bewegungsenergie entlang einer Dimension (10) kennengelernt. Diese Definition zeigt uns auch, wie Teilchenzahl und Temperatur zusammenhängen, wenn man, wie bei Photonen, Teilchen beliebiger Energie einfach erzeugen kann. Stellen wir uns zunächst wieder den Fall vor, dass wir nur eine Raumdimension haben. Jedes Photon im Strahlungsfeld hat eine ganz bestimmte Energie, aber im Durchschnitt wird die Energie $T/2$ betragen. Es wird natürlich auch viele Photonen geben, deren Energie größer ist als der Durchschnitt, aber eine wesentlich größere Energie können nur ganz wenige Photonen besitzen. Aber ganz egal, wie diese Verteilung der Photonen auf die verschiedenen Energien im Detail aussieht, so können wir doch sagen, dass der Platz, den es auf dieser Energieskala für Photonen gibt, immer proportional der mittleren Energie sein wird. Für ganz wenige Photonen können wir so ein Beispiel aufzeichnen:



Sagen wir also, dass bei einer gewissen Temperatur T auf der Energieleiste Platz ist für n Photonen. Erhöhen wir die Temperatur auf $2T$, so haben, bei gleich dichter Packung, auch $2n$ Photonen Platz. Die Anzahl der Photonen ist also, zumindest für den eindimensionalen Fall, proportional zur Temperatur.

Was geschieht nun, wenn wir noch zusätzliche Raumdimension dazugeben? Nun gibt es, neben der Energie, auch noch die Bewegungsrichtung der Photonen. Zusätzlich zu seiner Position entlang des Energiestrahls kann ein Photon nun auch in eine beliebige Richtung zeigen. Zeichnen wir das obige Beispielbild in 2 Dimensionen, so erhalten wir ein Bild wie dieses:



Die Anzahl an Photonen ist also in 2 Dimensionen proportional zur Fläche eines Kreises mit Radius T , also T^2 . Sie können sich nun sicher vorstellen, dass für den Fall von 3 Dimensionen, der uns eigentlich interessiert, die Photonenanzahl $n(T) \propto T^3$ proportional zum Volume einer Kugel mit radius T ist.

Damit können wir nun die Beziehung (12) zwischen Energie und Temperatur eines gewöhnlichen Gases auf ein "Gas aus Photonen" verallgemeinern. Wir haben

$$E_{\text{Licht}} = n(T)T \propto T^4 \quad (13)$$

Was bedeutet nun dieses Ergebnis? Stellen wir uns zunächst vor, dass wir ein gewöhnliches Gas haben, in das wir immer mehr Energie hineinstecken - eine Situation, die bei der Sternentstehung ja tatsächlich auftritt. Mit der Energie wird sich auch die Temperatur des Gases erhöhen - und zwar genau proportional dazu. Durch die Kollision der Gasteilchen verteilt sich die Energie über das Volumen, aber es wird auch Licht produziert. Die *durchschnittliche* Energie eines *einzelnen* Photons wird dabei, wie die Durchschnittsenergie eines Gasteilchens, proportional der Temperatur sein. Die *gesamte* Energie *aller* Photonen aber wird viel stärker ansteigen, nämlich mit T^4 . Es geht also mit steigender Temperatur immer mehr Energie in die Photonen, und diese Energie wird als Licht abgestrahlt. So beginnt ein Stern zu leuchten - obwohl er am Anfang noch Protostern genannt wird, weil die abgestrahlte Energie zunächst aus der Gravitationsenergie der sich verdichtenden Wolke stammt und noch nicht aus der Kernfusion in seinem Inneren.

7 Ein ganz einfaches Modell eines Sterns

Tatsächlich haben wir nun alle Beziehungen zusammengetragen, die es uns erlauben mit Hilfe einiger einfacher Annahmen ein Modell der wichtigsten Eigenschaften von Sternen zu bilden. Die "Parameter" dieses Modells, also die wichtigsten Eigenschaften der Sterne, sind

- Die Masse des Sterns M
- Der Sternradius R
- Die Oberflächentemperatur des Sterns T
- Die Kerntemperatur des Sterns T_c

dazu kommt noch eine weitere Eigenschaft, die kein Parameter des Modells ist, die aber oft verwendet wird, da sie recht direkt beobachtet werden kann: die Leuchtkraft L . Die Leuchtkraft ist nichts anderes als die abgestrahlte Energie pro Zeit, und damit ist sie leicht auf die Parameter zurückzuführen. Da wir das Modell möglichst einfach gestalten wollen, werden wir alle Beziehungen nur als Proportionalitäten schreiben. Zunächst ist die Leuchtkraft, als abgestrahlte Energie pro Zeit, natürlich proportional zur Energie im Strahlungsfeld, die nach (13) proportional zu T^4 ist. Darüberhinaus ist die Leuchtkraft natürlich größer, je größer die Fläche ist, die strahlt. Die Oberfläche des Sterns wiederum ist proportional zum quadrierten Radius R^2 , also haben wir insgesamt

$$L \propto R^2 T^4 \quad (14)$$

Als nächstes notieren wir den Zusammenhang zwischen Kerntemperatur, Radius und Masse, den wir in Abschnitt 5 gefunden haben. Als reine Proportionalität zwischen unseren Parametern geschrieben lautet er

$$T_c \propto \frac{M}{R} \quad (15)$$

Als letzten Punkt müssen wir noch bedenken, woher die Energie stammt, deren Abstrahlung durch die Leuchtkraft beschrieben wird. Wenn wir annehmen (was wir hier tun wollen), dass der Stern im Gleichgewicht ist, dann muss die Kernfusion im Inneren die Energie nachliefern, die der Stern an seiner Oberfläche abstrahlt. Um diese Prozesse genau zu verstehen müssten wir viele detaillierte Rechnungen machen - aber eine gute Abschätzung ist gar nicht so schwierig. Wenn wir einfach daran denken, dass die Materie im Stern die Energie nachliefert, so liegt die Annahme sehr nahe, dass die nachgelieferte Energie einfach proportional dazu ist, wieviel Materie vorhanden ist - also zur Masse des Sterns. Die Energie im Strahlungsfeld ist, wiederum nach (13) proportional zu T^4 . Also hätten wir insgesamt

$$M \propto T^4 \quad (16)$$

Damit ist unser Modell fertig und wir können versuchen, die Grundeigenschaften von Sternen zu verstehen.

8 Sterne im Vergleich

Als erstes wollen wir mit unserem einfachen Modell abschätzen, wie sonnenähnliche Sterne aussehen, wenn sie etwas andere Masse haben. Dabei soll sonnenähnlich bedeuten, dass sie ihre Energie, so wie die Sonne, aus der Kernfusion von Wasserstoff zu Helium gewinnen. Diese Sterne heissen Hauptreihensterne (Weil sie den am dichtesten besetzten Streifen im sogenannten Hertzsprung-Russel Diagramm einnehmen), und da sie alle Wasserstoff verbrennen ist ihre Kerntemperatur T_c ungefähr gleich der der Sonne. Zunächst sehen wir aus (16) dass die Oberflächentemperatur mit steigender Masse zunimmt, allerdings nur recht sanft, in unserem Modell mit der vierten Wurzel. Aus (16) finden wir weiters, dass der Radius bei konstanter Kerntemperatur einfach proportional zur Masse

$$R \propto M$$

ist. Setzen wir diese Beziehung sowie (15) schliesslich in (14) ein, so finden wir eine Leuchtkraft

$$L \propto M^3$$

Größere Sterne strahlen also viel mehr Energie ab, womit sie entsprechend auch viel kürzer leben.

Um zu prüfen, wie genau unser Modell ist, sehen wir uns einen Stern von doppelter Sonnenmasse an - Sirius A ist dafür ein guter Kandidat. Die Masse von Sirius A ist fast genau 2 Sonnenmassen, sein Radius ist aber nur ca. 1.7 Sonnenradien. Tatsächlich können wir damit aus (15) ablesen, dass die Kerntemperatur von Sirius A

$$T_{c,S_A} \sim \frac{2}{1.7} \sim 1.17$$

also um ca. 17% höher ist, als die unserer Sonne, was die Kernfusion deutlich schneller ablaufen lässt. Auch seine Leuchtkraft ist mit ca. $25L_\odot$ wesentlich größer als der Faktor 8, den wir in unserer einfachen Abschätzung erwarten - eine direkte Folge der höheren Fusionsrate im Inneren.