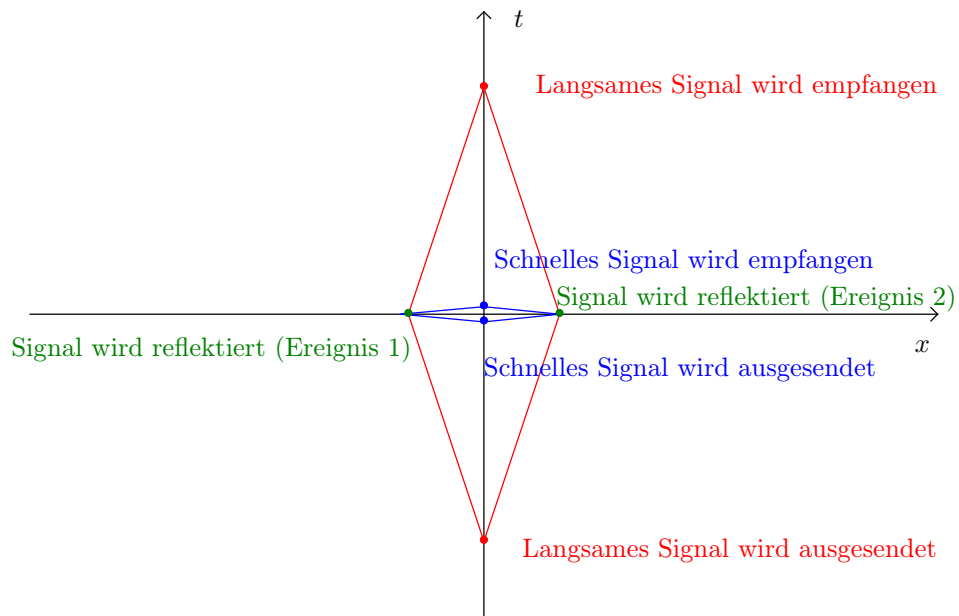


1 Strecken und Zeitintervalle

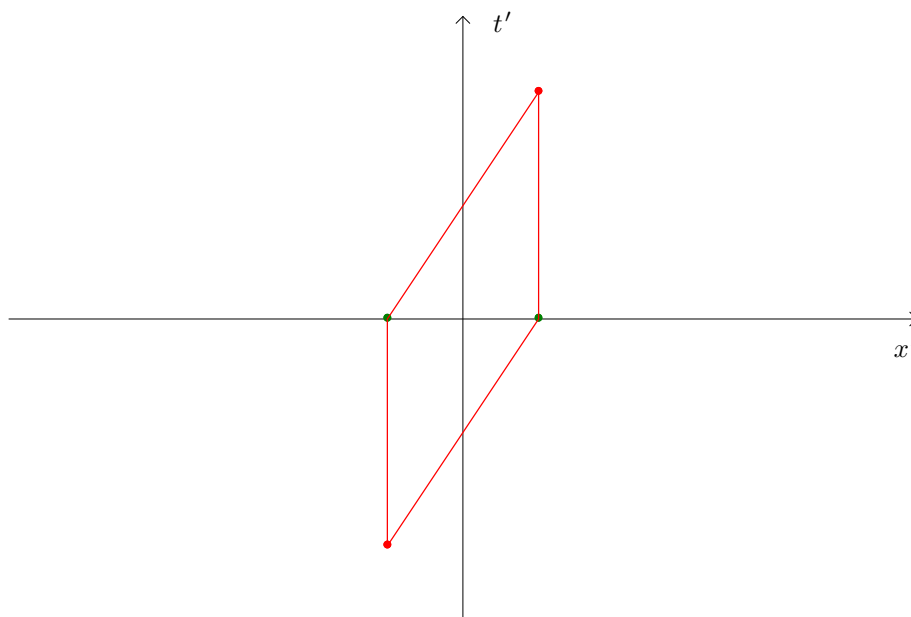
Die Grundlage jeder quantitativen Naturbeschreibung sind Abstände zwischen zwei Punkten (Strecken) und Zeitabstände zwischen zwei Ereignissen. Dabei gibt es eine seltsame Ungeichheit, die am besten durch ein Beispiel zu erklären ist. Stellen Sie sich vor, sie sitzen in einem Flugzeug und ein Becher Wasser steht vor Ihnen auf dem Tischchen. Sie können mit Recht sagen, dass das Wasser jetzt genau dort steht, wo es schon vor einer Sekunde gestanden hat, nämlich auf dem Tischchen vor Ihnen, also am gleichen Ort. Stellen Sie sich nun die gleiche Szene vor, wie sie für einen vorbeifliegenden Vogel oder vom Erdboden aus betrachtet aussieht: der Ort des Wasserbechers (und des gesamten Flugzeugs) wird sich in der selben Sekunde natürlich verändern. Um es etwas wissenschaftlicher auszudrücken: für uns ist es ganz selbstverständlich dass die Antwort auf die Frage, ob ein Objekt zu verschiedenen Zeitpunkten am selben Ort ist von unserem Bezugssystem abhängt.

Stellen wir uns nun die umgekehrte Frage: geschehen zwei Ereignisse an unterschiedlichen Orten zum gleichen Zeitpunkt? Am besten nehmen wir auch hierfür ein Beispiel: Wir beobachten ein Gewitter und sehen gleichzeitig zwei Blitze aus verschiedenen Richtungen. Natürlich liegt es nahe zu sagen, die Blitze sind gleichzeitig entstanden - und für den alltäglichen Gebrauch ist diese Näherung längst gut genug. Aber was ist, wenn wir es genau wissen wollen? Nun, zunächst kann es geschehen, dass wir den Donner des einen Blitzes später hören als den des anderen - klar, einer der Blitze war weiter entfernt und der Schall braucht ca. 3 Sekunden pro Kilometer. Wir *hören* also den weiter entfernten Blitz später, aber wie ist das mit dem Sehen? Nun, auch das Licht hat eine endliche Geschwindigkeit - wenn auch eine viel höhere, also *sehen* wir auch den weiter entfernten Blitz später. Ist der Blitz 10 Kilometer entfernt, hören wir seinen Donner nach ca. einer halben Minute, aber das Licht benötigt nur ca. 30 Mikrosekunden zu uns. Diese kleine Zeitspanne können wir im Alltag ignorieren und es genügt fast immer anzunehmen, dass Dinge die wir gleichzeitig sehen auch gleichzeitig geschehen sind. Wenn wir es aber wirklich genau wissen wollen, wie können wir sicherstellen, dass zwei Ereignisse an unterschiedlichen Orten wirklich gleichzeitig geschehen sind? Oder, um es wieder etwas wissenschaftlicher auszudrücken, wie können wir Gleichzeitigkeit experimentell definieren?

Unser Gedankenexperiment mit Blitz und Donner hat uns schon eine mögliche Antwort auf diese Frage geliefert. Wenn zwei Ereignisse gleich weit von uns entfernt geschehen und jeweils ein Signal aussenden (Licht, Schall oder auch eine Brieftaube, die mit konstanter Geschwindigkeit fliegt) das mit gleicher, konstanter Geschwindigkeit zu uns kommt, dann haben die Ereignisse gleichzeitig stattgefunden, wenn die beiden Signale bei uns gleichzeitig eintreffen. Wie aber stellen wir sicher, dass die Ereignisse gleich weit von uns entfernt stattgefunden haben? Auch dafür gibt es eine einfache Lösung: wir senden das Signal zunächst selbst aus und das Ereignis reflektiert das Signal nur. Zeichnen wir ein Diagramm, bei dem ein Beobachter in der Mitte ein schnelles und ein langsames Signal aussendet, so sieht das z.B. so aus:



Die zwei grünen Punkte (Ereignisse 1 und 2) sind also gleichzeitig geschehen. Weiters sind das Aussenden und das Empfangen der Signale jeweils am selben Ort geschehen. Diese Art Gedankenexperiment liefert uns also eine Definition von gleichen Ort zu verschiedener Zeit und von gleicher Zeit an verschiedenen Orten, die experimentell realisiert werden kann. Wichtig dabei ist allerdings, dass die Signale wirklich mit gleicher Geschwindigkeit laufen, und das sicherzustellen ist nicht so leicht, wie man vielleicht denken mag. Neben den praktischen Problemen - ein bewegtes Objekt wird z.B. durch Reibung gebremst oder bewegte Luft trägt den Schall verschieden schnell in verschiedene Richtungen - gibt es ein ganz grundsätzliches Problem mit der Addition von Geschwindigkeiten. Betrachten wir dazu das langsame Signal aus der obigen Skizze, aber betrachten wir es in einem bewegten Bezugssystem mit den Koordinaten x' und t' . Bewegt sich das Bezugssystem genau so schnell wie das Signal, so erhalten wir folgendes Bild:



Die zwei roten Punkte bezeichnen nach wie vor den gleichen Ort ($x=0$) im ursprünglichen Koordinatensystem, und die zwei grünen Punkte die gleiche Zeit ($t=0$). Die roten Signale, die sich im ursprünglichen Koordinatensystem mit einer Geschwindigkeit, die wir v nennen, ausgebreitet haben, breiten sich nun entweder mit der Geschwindigkeit 0 oder $2v$ aus - wir addieren oder subtrahieren die Geschwindigkeit des Koordinatensystems, die ja ebenfalls v beträgt, von der Geschwindigkeit v des Signals. Das scheint zunächst völlig logisch zu sein - aber dürfen wir das?

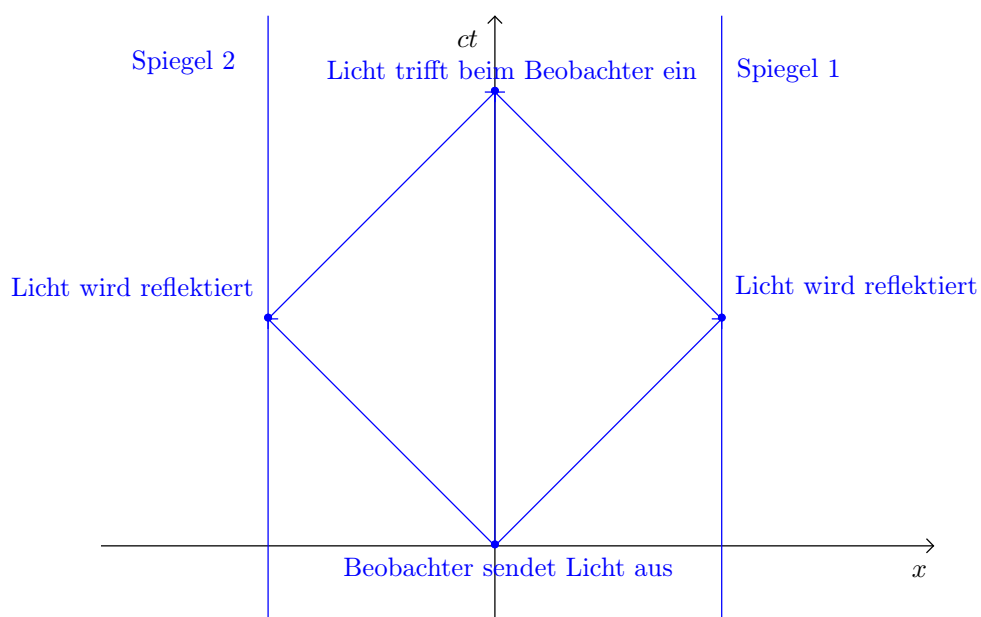
Die zunächst erstaunliche Antwort auf diese Frage ist nein, das dürfen wir nicht so einfach. Der Grund dafür scheint zunächst recht subtil. Geschwindigkeit ist ja Strecke dx pro Zeit dt , $v = dx/dt$. Im neuen Bezugssystem wäre das Strecke dx' pro Zeit dt' , also $v' = dx'/dt'$. Da wir die beiden Strecken dx und dx' einfach addieren können, sehen wir, dass sich die Geschwindigkeiten genau dann addieren, wenn $dt = dt'$, wenn also die Zeitintervalle in den Bezugssystemen gleich sind. Man könnte naiv annehmen, dass das in der Natur erfüllt ist - tatsächlich ist es das aber nicht. Geschwindigkeiten kann man nicht einfach addieren - am deutlichsten sieht man das bei Licht.

2 Die Lichtgeschwindigkeit

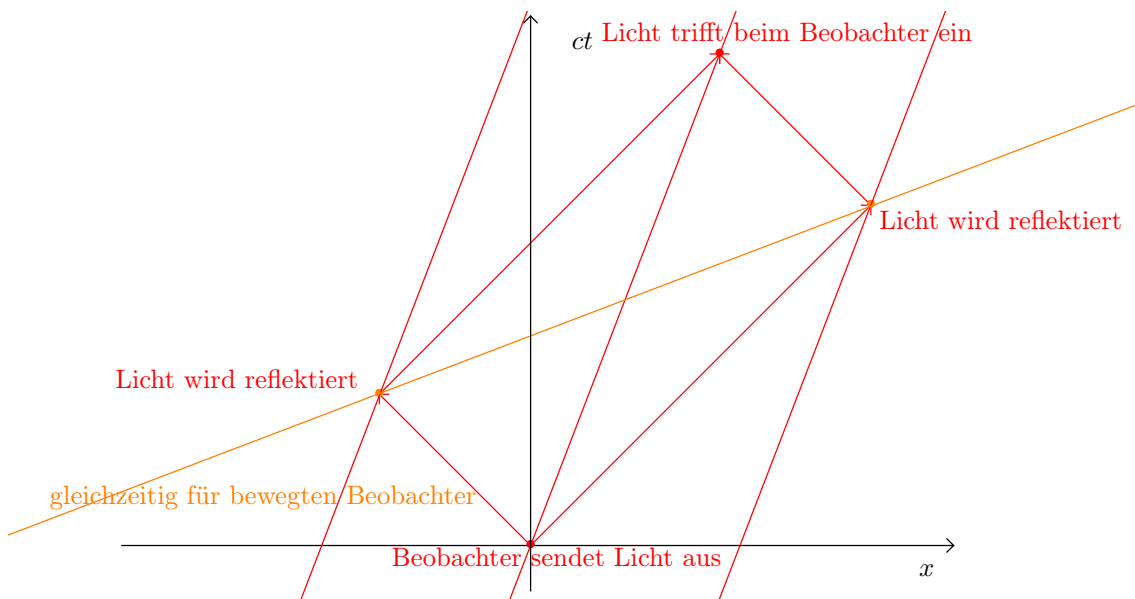
Als man im 19. Jahrhundert endlich die Grundgleichungen für elektromagnetische Felder (die Maxwell-Gleichungen) gefunden hatte und damit auch die Lichtausbreitung beschreiben konnte, lieferten diese ein höchst unerwartetes Resultat: Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts ist konstant. Beinahe 40 Jahre lang wurde diese Tatsache mehr oder weniger ignoriert bzw. versucht irgendwie zu umgehen. Seit über 100 Jahren sagen uns Experimente aber immer wieder hartnäckig das selbe: die Lichtgeschwindigkeit c ist *in jedem Bezugssystem* immer gleich. Diese fixe Geschwindigkeit ist ironischerweise der Kern der Relativitätstheorie und hat zunächst ganz erstaunliche Auswirkungen.

Sehen wir die Sache praktisch, so ist die konstante Lichtgeschwindigkeit einfach ideal für unser obiges Gedankenexperiment. Anders als für Schall oder Brieftauben kennen wir die Geschwindigkeit eines Lichtblitzes in jedem beliebigen Bezugssystem. Wenn wir unsere Achsen vernünftig skalieren - x für die Strecke und ct für die Zeit, so wissen wir, dass Lichtstrahlen *immer* diagonal verlaufen werden - in jedem Bezugssystem.

Nehmen wir nun ganz konkret an dass wir genau in der Mitte zwischen zwei Spiegeln sitzen und zu einem gewissen Zeitpunkt einen Lichtblitz aussenden, der von den Spiegeln dann natürlich gleichzeitig reflektiert wird. Betrachten wir diesen Vorgang in einem Bezugssystem in dem wir ruhen, so sieht das folgendermaßen aus:



Betrachten wir nun den exakt gleichen Vorgang in einem bewegten Bezugssystem:



Da Licht immer die gleiche Geschwindigkeit hat, also diagonal in den Diagrammen ist, sehen wir, dass für einen bewegten Beobachter Ereignisse gleichzeitig statfinden, die für den ruhenden Beobachter nicht gleichzeitig sind. Das mag zunächst erstaunlich scheinen, jedoch sollten wir nicht vergessen, dass die entsprechende Aussage für Orte (gleicher Ort ist abhängig vom Bezugssystem) vollkommen offensichtlich ist. Durch die Lichtgeschwindigkeit sind Strecken und Zeitintervalle auf eine fundamentale Art verknüpft. Was wir als Strecke und was als Zeit betrachten hängt vom Bezugssystem ab, und die Relativität der Gleichzeitigkeit ist der erste Ausdruck dafür.

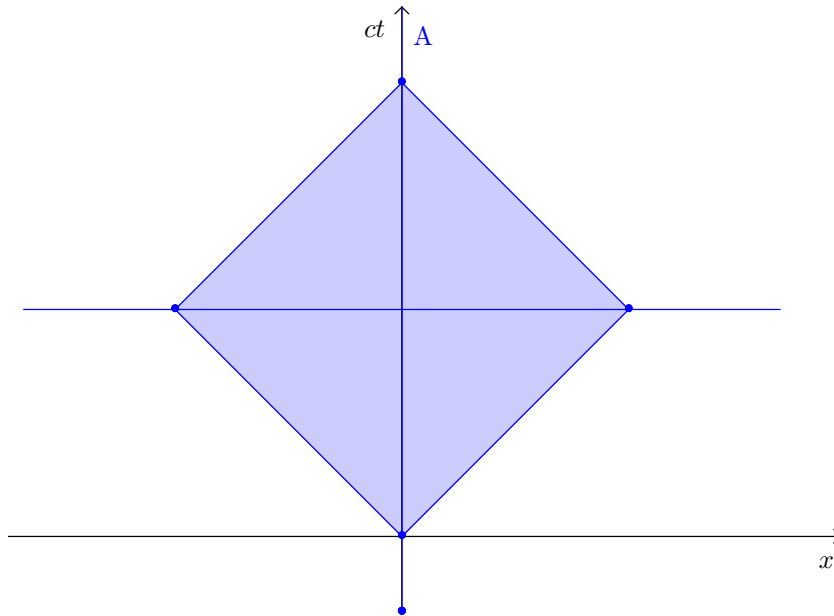
3 Eine neue Art von Abstand

Wir haben in den letzten Abschnitten viel von Bezugssystemen gesprochen. Bezugssysteme sind eigentlich Koordinatensysteme. Wir können einen Ursprung wählen und die Richtungen, in die Achsen zeigen. Zusätzlich können wir Bezugssysteme noch mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen. In all diesen Bezugssystemen müssen die physikalischen Gesetze gleich sein. Dahinter steckt letztlich das Trägheitsgesetz und unsere Vorstellung, dass es im leeren Raum keinen ausgezeichneten Punkt und keine ausgezeichnete Richtung gibt. Wenn wir z.B. zwei Körper betrachten, so darf es keine Rolle spielen, welche x -Koordinate einer der Körper hat. Alle physikalischen Gesetze dürfen nur vom Abstand abhängen. Dieser Abstand ist ein Vektor, z.B. $\vec{r}$ mit Betrag $r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$ und Richtung $\vec{r}/r$. Wenn wir unser Bezugssystem drehen, dreht sich die Richtung dieses und jedes anderen Vektors mit, aber der Betrag bleibt gleich.

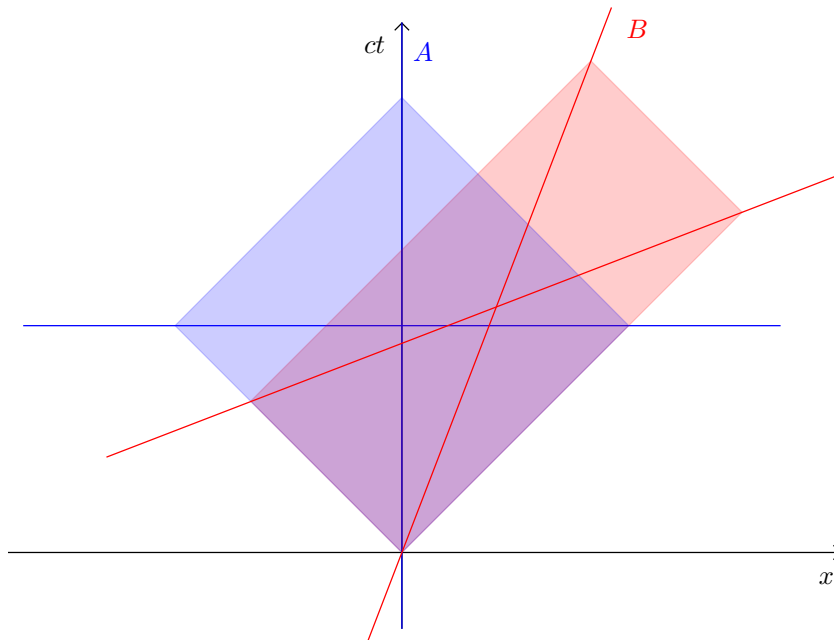
Warum kommen wir nun darauf zu sprechen? Nun, wie wir aus der obigen Konstruktion gesehen haben, können Strecken und Zeiträume ineinander transformieren. Was Alice als Strecke sieht, ist für Bob, der sich relativ zu Alice bewegt, vielleicht ein Zeitintervall - jedenfalls scheint das nach unserer Konstruktion möglich zu sein. Oder, in der Vektorsprache, wie sehen die räumlichen und zeitlichen Koordinaten eines Vektors aus, und was ist der Betrag, den alle gleich sehen? Die Frage wollen wir nun beantworten und um es nicht allzu kompliziert zu machen, beschränken wir uns auf nur eine räumliche Dimension.

Der erste Schritt unserer Suche ist es, das Gleichzeitigkeitsdiagramm von oben in eine etwas übersichtlichere, abstraktere Form zu bringen. Nennen wir zunächst eine unbewegte Beobachterin Alice und zeichnen ihren Ort, die sogenannte Weltlinie ($x = 0$), sowie die Lichtblitze die sie aussendet

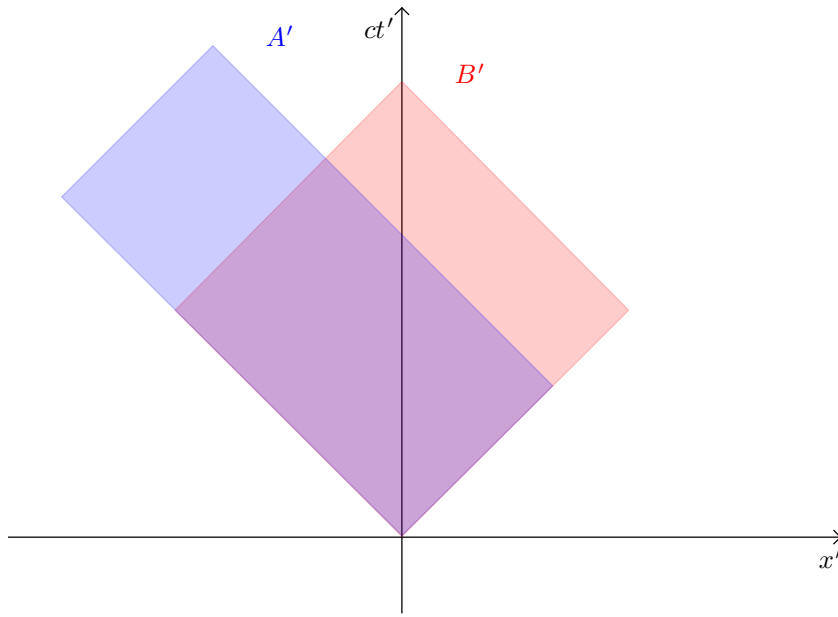
und ihre Definition der Gleichzeitigkeit blau in unser Raum-Zeit Diagramm.



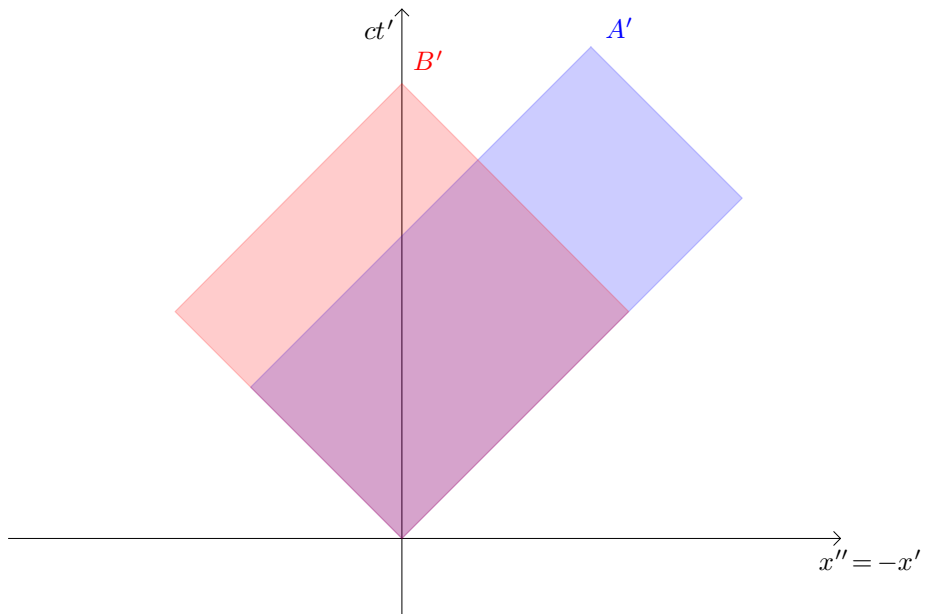
Fügen wir nun einen (mit der Geschwindigkeit v bewegten) Beobachter, nennen wir ihn Bob, hinzu. Seine Weltlinie $x = vt$ sowie die Lichtblitze, die er aussendet, und seine Definition von Gleichzeitigkeit zeichnen wir rot ein:



Gehen wir nun in ein Bezugssystem $x' t'$, in dem Bob ruht - Bobs Weltlinie ist also gegeben durch $x' = 0$. Alice bewegt sich in diesem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit $-v$ auf einer Weltlinie $x' = -vt$. Das entsprechende Raum-Zeit Diagramm ist:



Wir konzentrieren uns zunächst nur auf die Flächen A und A' bzw. B und B' , die in den Raum-Zeit Diagrammen jeweils von den Lichtblitzen eingeschlossen werden, die Alice bzw. Bob aussenden. Dabei geht A' aus A durch eine Transformation hervor, die wir als $A' = \text{LT}(A, v)$ schreiben, wobei v die Geschwindigkeit bezeichnet, die das Bezugssystem $x' t'$ im Bezug auf $x t$ besitzt. Natürlich ist auch $B' = \text{LT}(B, v)$. Wählen Alice und Bob die Abstände zu ihren Spiegeln im Inertialsystem, in dem sie jeweils ruhen, gleich, so ist $A = B'$. Wir drehen nun die x' -Achse um, d.h. wir führen eine neue Koordinate $x'' = -x'$ ein, was an den Flächen A' und B' nichts ändert.



Von diesem gespiegelten Inertialsystem $x'' t'$ gelangen wir durch eine Transformation mit v aber nun wieder zurück in unser ursprüngliches Inertialsystem $x t$. Daher ist

$$A = \text{LT}(A', v) = \text{LT}(\text{LT}(A, v), v)$$

Das zweimalige Anwenden derselben Transformation auf A liefert also wieder A , woraus wir

schließen können, dass die Fläche A unter der Koordinatentransformation unverändert bleibt. Das ist die unveränderliche Größe, die wir gesucht haben - sie ist in jedem Bezugssystem gleich. Im Moment ist sie allerdings noch etwas unanschaulich, was wir aber leicht ändern können.

4 Lichtkoordinaten

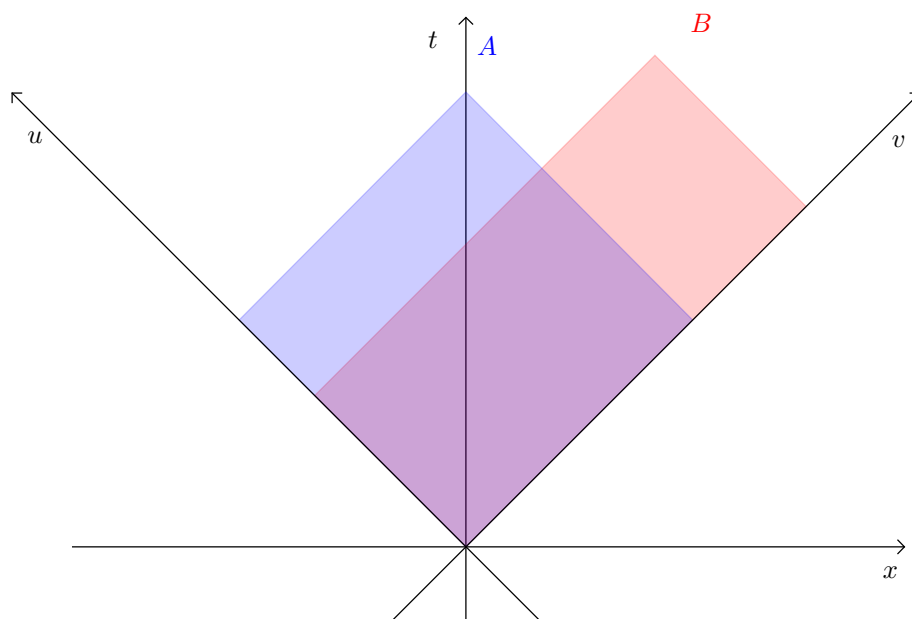
Wir sind es gewohnt räumliche (z.B. x) und zeitliche (z.B. t) Koordinaten zu verwenden. Das ist oft auch sehr nützlich, aber für unsere derzeitigen Überlegungen ist es tatsächlich vorteilhaft, wenn wir Koordinaten nicht nach Raum und Zeit trennen - die ja für verschiedene Beobachter verschieden sind - sondern solche, die entlang der beiden Lichtstrahlen gehen. Zu diesem Zweck führen wir lichtartige Koordinaten

$$v = \frac{t+x}{\sqrt{2}} \quad u = \frac{t-x}{\sqrt{2}}$$

ein, aus denen wir unsere üblichen Zeiten und Strecken als

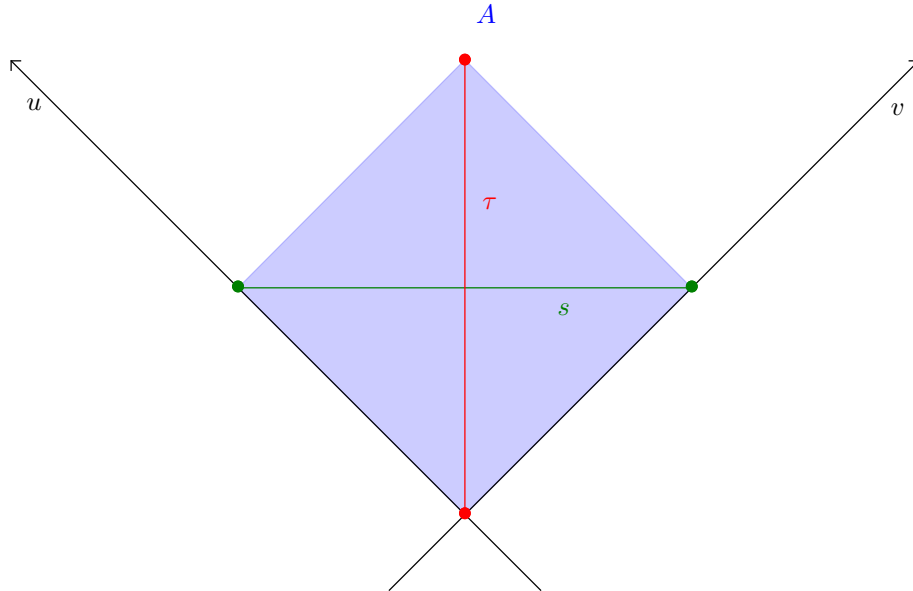
$$t = \frac{v+u}{\sqrt{2}} \quad x = \frac{v-u}{\sqrt{2}}$$

wieder gewinnen können. Zusätzlich wollen wir das tun, was Theoretiker immer gerne machen, nämlich in natürlichen Einheiten rechnen. Für uns bedeutet das, dass wir die Lichtgeschwindigkeit $c=1$ gleich eins setzen. Wenn also eine Strecke eine Sekunde ist, so ist es eine Lichtsekunde, die Strecke, die Licht in einer Sekunde zurücklegt. Und eine Geschwindigkeit von 0.5 bedeutet halbe Lichtgeschwindigkeit. Zeichnen wir die neuen Achsen in unser Diagramm von Alice und Bob und ihren Spiegeln:



Die Lichtkoordinaten stellen sich nun sofort als extrem nützlich heraus: Die Flächen A und B , die sich unter Koordinatentransformationen nicht ändern, sind einfach $A = u_A v_A$ und $B = u_B v_B$. Wenn

wir uns nun alleine der unbewegten Alice zuwenden, so können wir ausserdem noch ablesen, was diese Fläche denn physikalisch bedeutet:



Die grüne Linie mit räumlicher Länge s ist der Abstand zweier Ereignisse (der Spiegelreflexionen) in dem speziellen Bezugssystem, in dem sie gleichzeitig stattfinden. Die rote Linie gibt den zeitlichen Abstand τ der zwei Ereignisse (Aussenden und empfangen des Lichtblitzes) in dem speziellen Bezugssystem, in dem sie am gleichen Ort stattfinden. Beide Abstände sind die Diagonalen des Quadrats mit Fläche A , also ist

$$\tau^2 = 2A$$

Da aber ganz allgemein, nicht nur in diesem speziellen Bezugssystem $A = uv$ ist, haben wir insgesamt

$$\tau^2 = 2uv = t^2 - x^2 \quad (1)$$

Der gesuchte Betrag des raumzeitlichen Abstandsvektors *in einem beliebigen Bezugssystem*, in dem der zeitliche Abstand t und der räumliche Abstand x ist, ist also der *zeitliche* Abstand zwischen den beiden Punkten in dem Bezugssystem, in dem sie am gleichen Ort stattfinden. Wie wir aus (1) sehen, ist das der minimale zeitliche Abstand zwischen den Punkten und er heisst Eigenzeit.

Was geschieht aber, wenn wir stattdessen auf die grünen Punkte sehen? Die Antwort steckt tatsächlich schon in (1). Mit zeitlichem Abstand $t = 0$ (die grünen Punkte sind gleichzeitig!) und räumlichen Abstand $x = s$ erhalten wir

$$\tau^2 = -s^2$$

und somit, wieder aus (1) aber diesmal für ein allgemeines Bezugssystem

$$s^2 = -\tau^2 = x^2 - t^2$$

Wir können also zeitliche und räumliche Abstände am Vorzeichen von τ^2 unterscheiden. Ist $\tau^2 = 2uv = t^2 - x^2 > 0$ so ist der Abstand *zeitartig*, ist $\tau^2 = 2uv = t^2 - x^2 < 0$, so ist der Abstand *raumartig* - und das ist in jedem Koordinatensystem so. Dazwischen gibt es auch $\tau^2 = 0$. Zwei Punkte mit diesem Abstand haben entweder $u = 0$ oder $v = 0$, liegen also auf einem Lichtstrahl. Dieser Abstand nennt sich *lichtartig*.

Insgesamt gibt es also raumzeitliche Abstände die größer, kleiner oder gleich null sein können. Und ist der Abstand null, so bedeutet das nicht einen Punkt, sondern alle Punkte auf den Lichtstrahlen. Das ist eine deutlich andere Geometrie, als Sie sie aus der Schule kennen.

5 Was hat das mit Gravitation zu tun?

Wenn wir bisher von Bezugssystemen gesprochen haben, so haben wir damit immer gleichförmig zueinander bewegte Beobachter im leeren Raum gemeint. Nun kommen wir auf den Kern der Gravitation zu sprechen, der ganz erstaunlich ist, und für den es bei Newton keine Erklärung gibt. Das ist der Kern: die Masse m , die im Trägheitsgesetz

$$F = ma$$

auftritt tritt auch im Gravitationsgesetz

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

auf. Das bedeutet, dass die Beschleunigung auf einen Massepunkt m durch eine andere Masse M

$$a = \frac{GM}{r^2}$$

gar *nicht von der Masse m abhängt*. Diese Beobachtung ist weit über Newton hinaus gültig und hat ganz extrem weitreichende Konsequenzen.

Wir denken, aus unserer täglichen Erfahrung, dass Gravitation eine Kraft ist, die uns ganz platt gesagt zu Boden drückt. Dabei ist die Kraft, die wir empfinden, gar nicht die Gravitation. Am einfachsten ist das zu sehen, wenn Sie an einen Aufzug mit durchgetrenntem Kabel oder, moderner, an eine Raumstation denken: Befindet sich eine relativ kleine Kammer im freien Fall, so *herrscht im inneren keine Kraft*. Auf den Aufzug oder eine Raumstation wirkt die Gravitationskraft genau so wie auf uns, aber weil es keine Kraft gibt, die sich ihr entgegensetzt und jedes Objekt gleich beschleunigt, bildet das innere des Aufzugs oder der Raumstation für die Dauer des Freifalls *ein Bezugssystem in dem keine Kräfte wirken*. Wir empfinden nicht die Gravitationskraft, sondern die "Normalkraft" der Erdoberfläche (die letztlich aus dem Entartungsdruck der Elektronen resultiert). Ein uns natürlich scheinendes Bezugssystem in fixem Abstand zur Erdoberfläche ist eigentlich unnatürlich, weil es, im Vergleich zum freifallenden, kräftefreien Bezugssystem, konstant beschleunigt. Um zu verstehen, welche Phänomene wir in einem Gravitationsfeld bei konstantem Abstand von der Masse haben, sollten wir uns daher *beschleunigte Beobachter* in einem Bezugssystem ansehen.

6 Beschleunigte Beobachter

Die einfache Beziehung (1) bildet die Grundlage all unserer weiteren Betrachtungen. Zunächst müssen wir sie allerdings noch ein klein wenig für den Gebrauch in frei Fallenden Bezugssystemen

aufbereiten. Wie sie vielleicht bemerkt haben, habe ich immer betont, dass die Raumstation oder der Aufzug klein sein müssen. Das kommt daher, dass die Gravitationsbeschleunigung an verschiedenen Orten verschieden sein kann. Weit entfernt von der Erde ist sie z.B. kleiner als nahe der Erdoberfläche. Auch zeigt die Beschleunigung immer zum Erdmittelpunkt, und wenn die frei fallende Kammer zu gross ist, würde man das bemerken. Die Betrachtung von ausgedehnten Objekten ist aber auch gar nicht wichtig, wir können uns in der Theorie auf beliebig kleine (infinitesimale) Abstände konzentrieren, die wir mit einem vorangestellten d ausdrücken. In dieser infinitesimalen Form lautet die Beziehung (1) dann

$$d\tau^2 = 2dudv = dt^2 - dx^2 \quad (2)$$

Das schöne an der infinitesimalen Beziehung ist nun, das wir daraus leicht eine Beziehung für die Ableitungen gewinnen können. Dividieren wir die Gleichung durch das Quadrat der infinitesimalen Eigenzeit $d\tau$, so erhalten wir

$$1 = 2 \dot{u} \dot{v} = \dot{t}^2 - \dot{x}^2$$

wobei der Punkt die Ableitung nach der Eigenzeit $\dot{u} = du/d\tau$ bedeutet.

Betrachten wir nun die Weltlinie einer Beobachterin - Alice. Wir können sie als Funktion der Koordinaten x und t oder auch u und v von der Eigenzeit beschreiben. Eine ganz einfache Wahl wäre eine konstante Position $x = x_0$, womit wir $t = \tau$ erhalten, also die Zeit ist die Eigenzeit. Ein etwas weniger triviales Beispiel wäre $x = v_A t$, also eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v_A . Für diese finden wir, wenn wir (2) durch dt^2 dividieren und dann links und rechts die Wurzel ziehen

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - v_A^2}$$

die bekannte relativistische Zeitdilatation. Wir aber betrachten folgenden Ansatz:

$$v(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}a} e^{a\tau} \quad u(\tau) = -\frac{1}{\sqrt{2}a} e^{-a\tau}$$

womit die Geschwindigkeiten

$$\dot{v}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{a\tau} \quad \dot{u}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-a\tau}$$

die Gleichung (2) erfüllen. Berechnen wir noch die Komponenten der Beschleunigung

$$\ddot{v}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} a e^{a\tau} \quad \ddot{u}(\tau) = -\frac{1}{\sqrt{2}} a e^{-a\tau}$$

und die dazugehörige, bezugssystemunabhängige Länge des räumlichen Vektors

$$\sqrt{-2\ddot{u}\ddot{v}} = a$$

so sehen wir, dass dies tatsächlich Bahnen sind, bei denen zu jedem Zeitpunkt Alice die Beschleunigung a erfährt. Tatsächlich können wir aber noch weitere erstaunliche Eigenschaften dieser Bahn

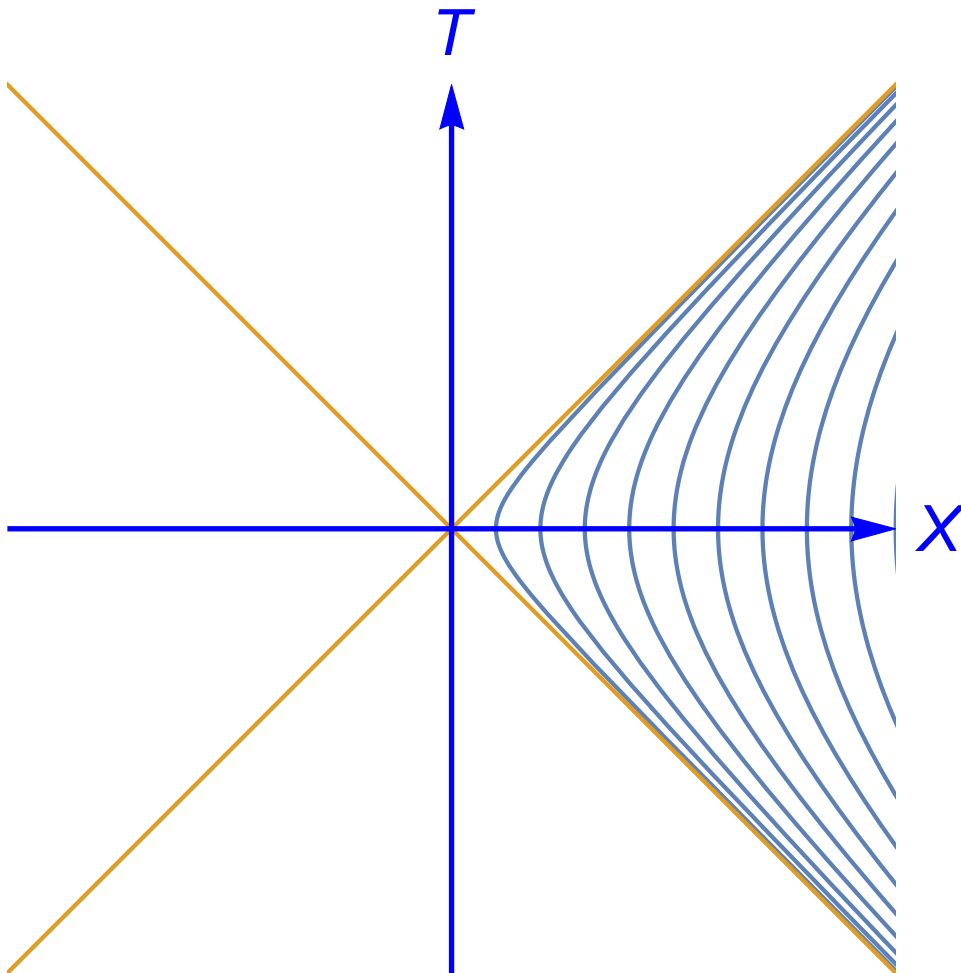
finden, wenn wir auf die Koordinaten selbst sehen. Zunächst einmal können wir den räumlichen Abstand der Bahn vom Ursprung berechnen:

$$s = \sqrt{-2uv} = \frac{1}{a}$$

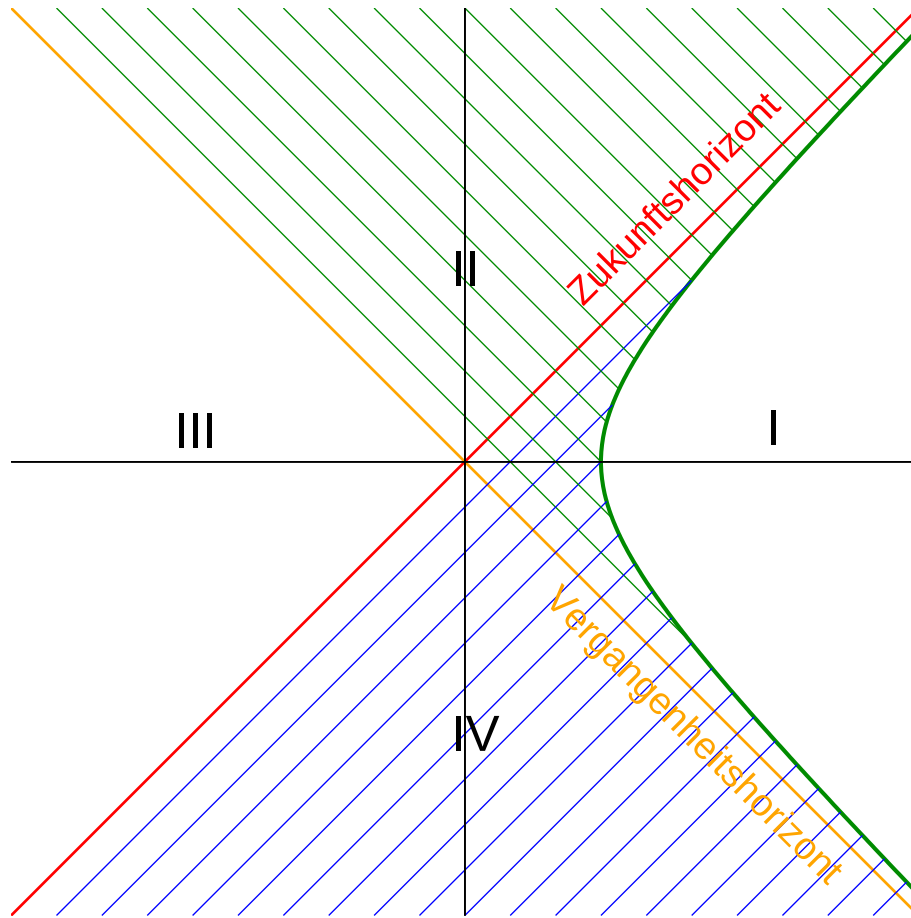
Alice misst also *immer den selben Abstand* $1/a$ zum Ursprung. Weiters sehen wir aus der Beziehung

$$u(\tau) = -\frac{1}{a^2 v(\tau)}$$

dass die Bahnkurven Hyperbeln sind, die sich asymptotisch den Lichtstrahlen annähern, wie in folgendem Diagramm dargestellt:



Wir haben nun einige höchst interessante Tatsachen gelernt, die es uns gemeinsam erlauben, ein Bild davon zu zeichnen, wie die Welt für Alice aussieht und wie wir das auf die Gravitation übertragen können. Zunächst einmal wissen wir nun, dass Alice, obwohl sie konstant beschleunigt, nie die Lichtgeschwindigkeit erreicht. Und zwar ist es egal, wie stark sie beschleunigt - es kann beliebig schnell sein - die Grenzggeschwindigkeit wird immer die Lichtgeschwindigkeit bleiben. Lichtstrahlen sind also maximal schnell. Lassen wir Alice andauernd Lichtsignale aussenden und empfangen und betrachten wir deren Pfade, so ergibt sich dieses Bild:



Alice selbst wird immer im Bereich I zwischen den rechten Lichtstrahlen bleiben, aber noch mehr: alles, was sie ausendet, kann nur in die Bereiche I oder II gelangen. Umgekehrt kann sie nur Signale aus den Bereichen I und IV selbst empfangen. Die Grenzen dieser Bereiche - die Lichtstrahlen jenseits derer Alice nichts empfangen oder nichts senden kann, nennen wir Horizonte. Was hinter ihrem Zukunftshorizont liegt kann Alice nie erfahren, und was hinter ihrem Vergangenheitshorizont liegt, kann sie niemals mit ihren Signalen erreichen.

7 Schwarze Löcher

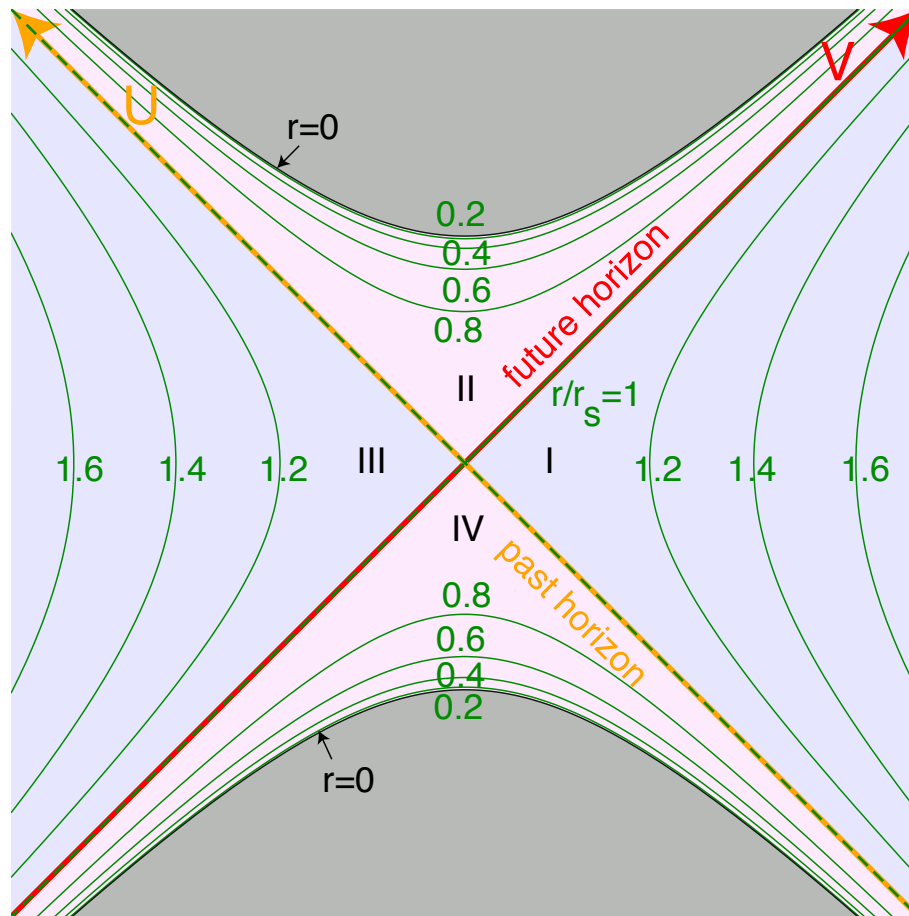
Was hat das nun alles mit Gravitation und schwarzen Löchern zu tun? Nun, erinnern wir uns, dass konstanter Abstand zu einer Masse eigentlich konstante Beschleunigung bedeutet. Sind wir nicht im leeren Raum sondern in der Nähe einer grossen Masse, so ist Alice in konstantem Abstand und beschleunigt konstant. Die Frage ist nur: was liegt im Ursprung? Vielleicht denken Sie zunächst, dass dort die Punktmasse liegt, aber das kann nicht stimmen. Was wir vom Ursprung wissen ist, dass wir es dort gerade nicht mehr schaffen, mit Lichtgeschwindigkeit Alice jemals zu erreichen. Der Ursprung ist also der Radius, bei dem die Fluchtgeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit ist, und den kennen wir schon:

$$r_s = \frac{2MG}{c^2}$$

Der Schwarzschildradius: $\sim 3\text{km}$ für unsere Sonne und ein paar Millionen Kilometer für Sgr A*, das schwarze Loch im Zentrum unserer Milchstrasse. Der genaue Zusammenhang zwischen Radius und Beschleunigung (dessen Herleitung etwas zu lange dauern würde) lautet

$$a^{-2} = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right) e^{\frac{r}{r_s}}$$

und grafisch dargestellt sieht das so aus:



Das vielleicht Erstaunlichste an diesem Diagramm ist, dass für Radien kleiner als der Schwarzschildradius die Kurven von konstantem Radius nicht mehr zeitartig, wie gewöhnliche Weltlinien, sondern raumartig sind. Innerhalb des Horizonts ist r eine Zeitkoordinate und, da sie bei 0 endet, endet dort auch die Zeit für jeden Beobachter der bis dorthin fällt.