

Teil II
Quantenmechanik

KAPITEL 1

QUANTISIERUNG: DER PHOTOEFFEKT

Betrachten wir folgenden Aufbau in Abbildung (1.1). An einer Hochspannungsquelle (HQ) wird eine Zinkplatte (Leiterplatte) angeschlossen, sodass diese negativ geladen ist. Gegenüber von der Zinkplatte wird eine Drahtspirale platziert, welche an einen Messverstärker angeschlossen ist. Diese Drahtspirale stellt eine Gegenelektrode dar und ist positiv geladen.

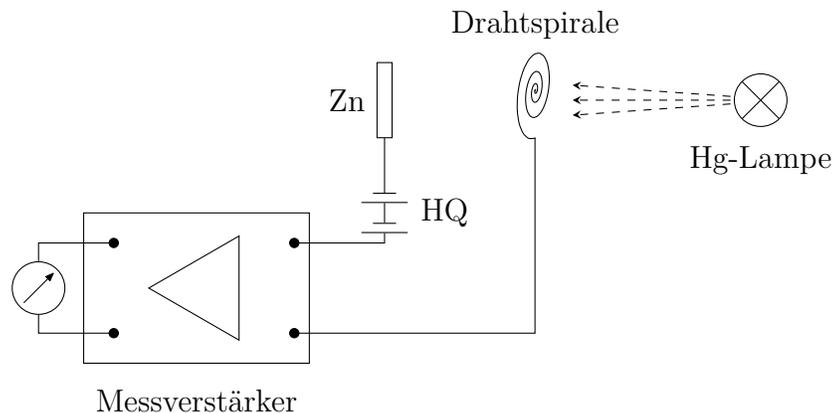


Abbildung 1.1: Aufbau zur Messung des Photoeffekts.

Der Aufbau ermöglicht es, den Fluss von Elektronen (Strom) zu messen, welche durch das elektrische Feld zwischen Zinkplatte und Drahtspirale zur Drahtspirale beschleunigt werden und durch den Messverstärker fließen. Bei normalem Tageslicht beobachten wir keinen Stromfluss. Stellen wir nun eine Quecksilberdampf Lampe hinter die Drahtspirale und schalten diese an, so beobachten wir das Entladen der Leiterplatte durch den fließenden Strom am Messverstärker.

Erkenntnis

Im Gegensatz zu Tageslicht sorgt die Beleuchtung durch eine Quecksilberdampf Lampe für die Entladung der Zinkplatte.

Was macht das Quecksilberdampfampenlicht so besonders?

Setzen wir ultraviolette (kurze Wellenlänge) und infrarote (lange Wellenlänge) Lichtfilter vor die Lampe, so stellen wir fest, dass beim Beleuchten mit Infrarotlicht kein Entladestrom fließt, wobei die Bestrahlung mit Ultraviolettlcht zu einem Entladestrom führt.

Erkenntnis

Es existiert eine obere Grenzwellenlänge des Lichts λ_g . Ist $\lambda > \lambda_g$, so fließt keine Entladestrom durch den Aufbau.

Bemerkung: Versuche mit unterschiedlichen Leiterplatten zeigen, dass λ_g vom Material abhängig ist.

Mithilfe eines Magnetfeldes kann die Ladung der Teilchen die für den Stromfluss sorgen bestimmt werden. Hierbei wird festgestellt, dass es sich bei den geladenen Teilchen die sich von der Zinkplatte lösen um Elektronen handelt. Auch im Vakuum wurden gleiche Beobachtungen gemacht, wodurch der beobachtete Effekt durch die Ionisierung von Luftteilchen zwischen Anode (Zinkplatte) und Kathode (Drahtspirale) ausgeschlossen ist.

Zwischenergebnis

Die Bestrahlung eines Leiters mit Licht löst aus diesem Elektronen aus. Dabei muss die Wellenlänge des Lichts kürzer sein als eine (vom Material des Leiters abhängige) Grenzwellenlänge λ_g .

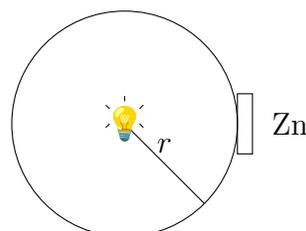
Was passiert wenn wir die Lichtintensität ändern?

Klassisch erwarten wir, dass mit höherer Intensität die Elektronen stärker aus der Zinkplatte „rausgerissen“ werden und entsprechend auch bei größerer Wellenlänge sich die Elektronen irgendwann aus der Platte lösen. Dies ist allerdings nicht der Fall. Beobachtungen zeigen, dass der Photostrom, also der Entladestrom, mit zunehmender Intensität zwar zunimmt, dieser Effekt aber auch nur ab einer Schwelle von $\lambda > \lambda_g$ auftritt. Für $\lambda < \lambda_g$ fließt trotz steigender Intensität kein Photostrom.

Diese Erkenntnis lässt erste Zweifel an der Wellennatur des Lichts entstehen, da sich das Licht hier scheinbar nicht so verhält, wie man es von einer Welle erwarten würde.

[Simulation zum Photoeffekt auf Leifiphysik.de](http://Leifiphysik.de).

Ein weiterer Widerspruch zum klassischen Wellenmodell wird ersichtlich wenn wir das Licht in einzelnen Lichtblitzen aussenden. Die kann durch bspw. einer Lochscheibe welche an einem Motor befestigt ist und sich mit einer bestimmten Pulsfrequenz dreht, umgesetzt werden.



Wir nehmen an, dass die Lichtleistung gleichmäßig, von der punktförmigen Lichtquelle weg, im Raum verteilt wird. Eine Quecksilberdampfampe mit einer elektrischen Leistung von $P = 200 \text{ W}$ strahlt 10% dieser Leistung aus. Entsprechend ist $P_{\text{licht}} = 20 \text{ W}$. Auf einer Entfernung von $r = 1 \text{ m}$ beträgt die „Flächen-Lichtleistung“

$$\frac{P_{\text{licht}}}{A} = \frac{P_{\text{licht}}}{4\pi r^2} = \frac{20 \text{ W}}{4\pi (1 \text{ m})^2} \simeq 1.6 \text{ W m}^{-2}, \quad (1.1)$$

wobei $A = 4\pi r^2$ der Oberfläche einer Kugel entspricht. Die Oberfläche eines Atoms mit Radius $r_{\text{atom}} \simeq 10^{-10} \text{ m}$, auch 1 \AA bzw. Angstrom genannt, beträgt

$$A_{\text{atom}} = 4\pi r_{\text{atom}}^2 \simeq 12 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2. \quad (1.2)$$

Unter der Annahme, dass sich die Flächenleistung gleichmäßig auf der Oberfläche der Zinkplatte verteilt, entspricht die aufgenommene Leistung eines Zinkatoms, wenn 90% des Lichts reflektiert wird,

$$P_{\text{atom}} = 0.1 \frac{P_{\text{licht}}}{A} \cdot A_{\text{atom}} = 0.1 \cdot 1.6 \text{ W m}^{-2} \cdot 12 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \simeq 2 \cdot 10^{-20} \text{ W}. \quad (1.3)$$

Hierbei vernachlässigen wir erstmal, dass für den Photoeffekt eigentlich nur der UV-Anteil des Lichts relevant ist. Bei einer Ablösearbeit von $W_a = 4 \text{ eV} \simeq 6.4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ muss eine Zeit von Δt gewartet werden, bis die erforderliche Energie $P_{\text{atom}} \cdot \Delta t$ gespeichert wurde, um ein Elektron aus der Zinkplatte herauszulösen. Diese Zeit entspricht demnach

$$\Delta t = \frac{W_a}{P_{\text{atom}}} = \frac{6.4 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{2 \cdot 10^{-20} \text{ W}} \simeq 32 \text{ s}. \quad (1.4)$$

Kommen wir zurück zu den Lichtblitzen, die mithilfe der Lochscheibe ausgesandt werden. Wird durch den erzeugten und verstärkten Photostrom ein Lautsprecher erregt, hören wir mit der Pulsfrequenz der Lichtquelle ein „Klick“ und zwar instantan. Wir nehmen keine Zeitverschiebung Δt wahr, welche wir aus der Annahme des klassischen Wellenmodells bestimmt haben.

Erkenntnis

Der Photoeffekt tritt, im Widerspruch zur Wellentheorie, instantan auf. Wir sagen, der Photoeffekt tritt trägheitslos ein.

Die Gegenfeldmethode

Bisher haben wir eine negativ geladene Leiterplatte (Anode) und eine positiv geladene Gegenelektrode (Kathode) betrachtet um in dem dazwischen aufgebauten elektrischen Feld die losgelösten Elektronen zur Kathode zu beschleunigen. Nun drehen wir das ganze um. Die Leiterplatte wird zur Kathode, die Gegenelektrode zur Anode, so dass sich ein Gegenfeld aufbaut. Um nun zur Gegenelektrode, also zur Anode, zu gelangen, müssen die herausgelösten Elektronen aus der Zinkplatte dieses Gegenfeld erst einmal überwinden. Ist die kinetische Energie größer als die des Gegenfelds $E_{\text{kin}} \geq e \cdot U_g$, wobei U_g die Spannung ist die zwischen

Kathode und Anode anliegt, so erreichen die Elektronen die Anode und es fließt ein Strom I . Drehen wir U_g soweit hoch bis $I = 0$ wird, entspricht dies gerade $E_{kin} = e \cdot U$. Die zu beobachtenden Kurve ist in Abbildung (1.2) dargestellt.

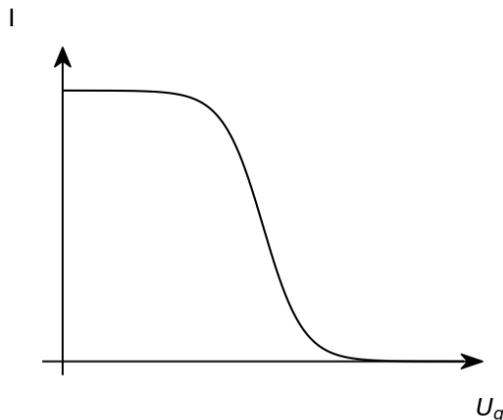


Abbildung 1.2: Verlauf des Photostroms in Abhängigkeit der Gegenspannung

Soweit haben diese Beobachtungen bei konstanter Frequenz und Intensität des Quecksilberdampflichts stattgefunden. Ändern wir die Intensität, so ändert sich nichts. Ändern wir die Frequenz, indem wir einen Farbfilter vor die Lichtquelle stellen, so wird der Strom größer für höhere Frequenzen und kleiner für niedrige Frequenzen. Nehmen wir also drei verschiedene Filter und notieren wir die Gegenspannung U_g bei der der fließende Strom gerade Null wird. Wir erhalten folgende Tabelle, in der wir die Frequenz f des Lichts aus der Wellenlänge ($\lambda = c/f$) und die kinetische Energie aus der Gegenspannung bestimmen.

Filter	Lichtfarbe	Wellenlänge $\lambda[10^{-7} \text{ m}]$	$U_g[\text{V}]$ für $I = 0$	$f[10^{14} \text{ s}^{-1}]$	$E_{kin}[\text{eV}]$
F1	gelb	5.78	0.78	5.19	0.78
F2	grün	5.46	0.88	5.49	0.88
F3	blau	4.36	1.38	6.88	1.38

Tabelle 1.1: Messwerte und Auswertung der Gegenfeldmethode für verschiedene Farbfilter.

In einem $f - E_{kin}$ Diagramm auftragen erhalten wir den Plot in Abbildung (1.3)

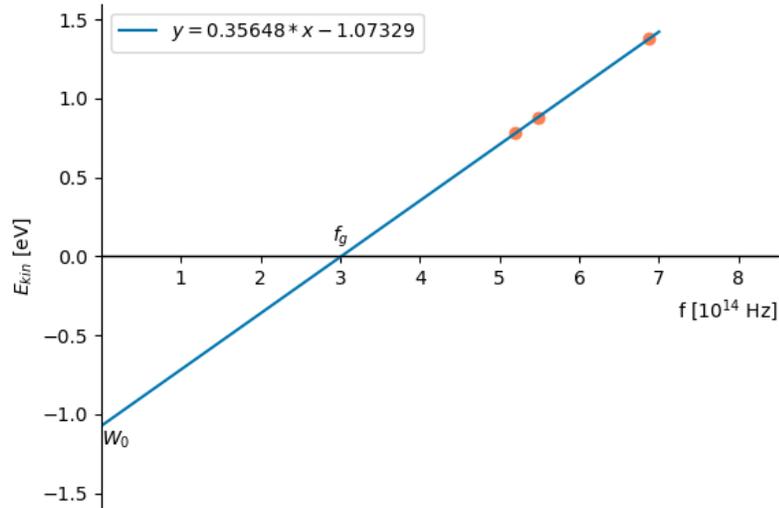


Abbildung 1.3: Gefittete Datenpunkte aus der Tabelle (1.1)

Durch die drei Punkte können wir eine Gerade fitten und erhalten durch Extrapolation einen x- und y-Achsen Abschnitt bei $f = f_g$ und $E_{kin} = -W_0$. f_g stellt dabei die Grenzfrequenz dar ($f_g = c/\lambda_g$) und W_0 die Arbeit die verrichtet wird, um ein Elektron aus dem Zinkatom zu lösen. Die Gleichung lautet

$$E_{kin} = h \cdot f - W_0 \quad (1.5)$$

und der Fit aus Abbildung (1.3) liefert die Werte

$$W_0 = 1.07329 \text{ eV} \quad (1.6)$$

$$h = 0.35648 \cdot 10^{-14} \text{ eV s} = 5.7108096 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (1.7)$$

mit dem Umrechnungsfaktor

$$1 \text{ eV} = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ J.} \quad (1.8)$$

1 eV ist die gewonnene Energie eines Elektron beim durchlauf einer Beschleunigungsspannung von 1 V. Die Steigung

$$h = \frac{W_0}{f_g} = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (1.9)$$

ist eine materialunabhängige Konstante die für beliebige Leiterplatten gleich bleibt. Da die Größen der Einheit [J s] eine „Wirkung“ darstellt, heißt diese Größe **Plancksches Wirkungsquantum**.

Einstein deutet den Photoeffekt so, dass das Licht keine kontinuierliche Energie trägt, sondern diese „gequantelt“ in einer endlichen Anzahl an Energiebündel lokalisiert ist. Diese Lichtquanten, auch Photonen genannt, bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit, sind unteilbar und können nur als Ganze erzeugt oder absorbiert werden. Ein Lichtquant trägt die Energie

$$E_{\text{photon}} = h \cdot f \quad (1.10)$$

wobei f der Frequenz die Lichts angibt. Monochromatisches Licht trägt also Lichtquanten der Energie $h \cdot f$. Des Weiteren bedeutet intensiveres Licht das Auftreten von mehr Lichtquanten pro Zeiteinheit, nicht jedoch energiereicheres Licht.

Im Photoeffekt geben entsprechend die Lichtquanten ihre Energie an Elektronen ab. Reicht diese Energie die materialcharakteristische Ablösearbeit zu verrichten, so löst sich das Elektron und behält überschüssige Energie als kinetische Energie

$$h \cdot f = E_{kin} + W_0. \quad (1.11)$$

Ergebnis

Licht trägt diskrete Energien $h \cdot f$ in Form von Lichtquanten (Photonen) die ihre Energie als ganzes abgeben oder nicht. Entspricht die Energie von Lichtquanten der Ablösearbeit W_0 eines Elektrons im Atom, $h \cdot f = W_0$, so löst sich dieses. Ist die Energie größer, so bleibt der Überschuss als kinetische Energie übrig.

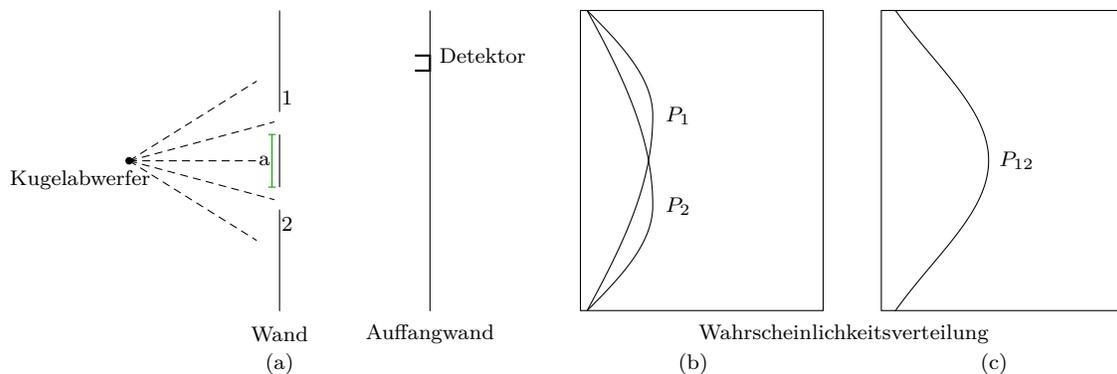
KAPITEL 2

QUANTENVERHALTEN: DOPPELSPALTEXPERIMENT UND UNSCHÄRFERELATION

Die Quantenmechanik dient der Beschreibung physikalischer Vorgänge auf atomarer Ebene. Solche Vorgänge verhalten sich grundlegend jenseits aller logischen und intuitiven Vorhersagen der klassischen Mechanik. Die Welt wie wir sie mit bloßen Augen wahrnehmen wird von der Quantenmechanik erst mal komplett auf den Kopf gestellt und lässt in erster Instanz am eigenen Wissen zweifeln. Manche Dinge sind nun mal bei genauerer Beobachtung nicht so wie sie zu sein scheinen. Wir beginnen mit einem wichtigen Experiment welches wir zuerst in klassischer Vorgehensweise betrachten: Das Doppelspaltexperiment.

1 Ein Experiment mit Kugeln

Betrachten wir folgendes Experiment. Wir nehmen einen Kugelabwerfer, stellen diesen vor eine Wand mit zwei Spalten, welche nah beieinander liegen, und eine Auffangwand hinter der Wand mit den Löchern.



Wir wollen die Wahrscheinlichkeit messen, mit der eine Kugel welche durch einen Spalt fliegt, auf dem Schirm landet. Wir sprechen von Wahrscheinlichkeiten, da wir nicht vorher-sagen können welchen weg die Kugel einschlägt. Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich aus

der Anzahl auftreffender Kugeln an einem Ort, geteilt durch die Gesamtanzahl an Kugeln welche auf der Auffangwand ankommen. Die resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in (c) graphisch dargestellt. Wir stellen uns die Fragen: Warum sieht die Verteilung genau so aus? Warum liegt der Maximalwert bei $x=0$?

Um dem nachzugehen schauen wir uns die Wahrscheinlichkeitsverteilung durch jedes Loch einzeln an. Dies können wir tun, indem wir ein Loch zuhalten bzw. die Bälle durch dieses Loch nicht in unsere Statistik aufnehmen. Das Resultat sind die Kurven aus (b), wobei P_1 die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Auftreffens aus Loch 1 und P_2 die Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Durchgang durch Loch 2 ist. Die Wahrscheinlichkeit des Auftreffens ist dabei am größten auf der geraden Linie zwischen Loch und Auffangwand. vergleichen wir die Wahrscheinlichkeiten aus (b) und (c), so sehen wir, das

$$P_1 + P_2 = P_{12} \quad (2.1)$$

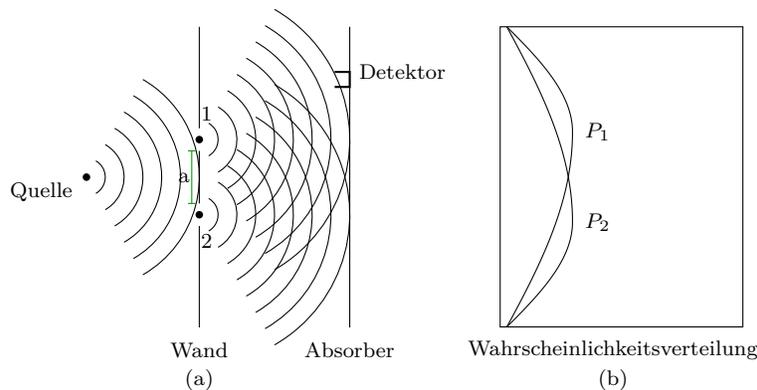
gilt. Zusätzlich beobachten wir auch nie Halbe oder Bruchteile von Kugeln die Auftreffen.

Erkenntnis

Kugeln im Doppelspalt kommen immer als ganzes auf der Auffangwand an und ihre Wahrscheinlichkeit ist additiv.

2 Ein Experiment mit Wellen

Ersetzen wir nun den Ballabwerfer durch eine Wellenquelle und die Auffangwand durch einen Absorber, s.d. die Wellen nicht reflektiert werden können (z.b. einen Sandstrand).



Die Wellenquelle erzeugt Kugelwellen die sich gemäß

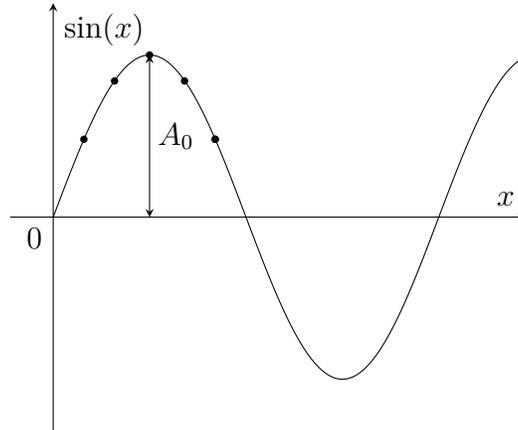
$$\psi(x) = \frac{A_0}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (2.2)$$

ausbreiten. Wir erinnern uns, dass sich die Intensität einer Welle gleichmäßig im Raum verteilt:

$$I = \frac{P}{A} \quad (2.3)$$

wobei P die Leistung der Welle ist und $A = 4\pi r^2$ die Oberfläche einer Kugel mit Radius r . Im Mittel ist die Leistung, also Energie E pro Zeit t , einer Welle durch das Quadrat der Amplitude gegeben

$$P = \frac{E}{t} = \frac{1}{2}kA_0^2. \tag{2.4}$$

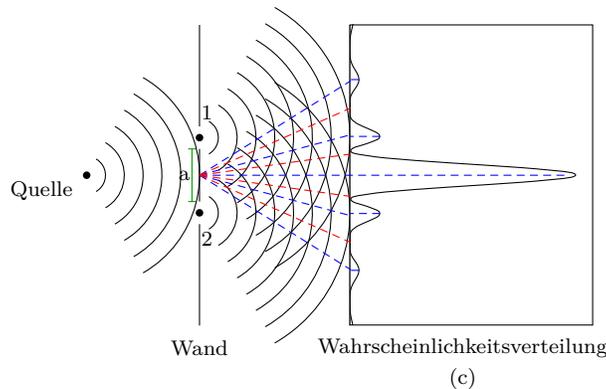


Damit ist einerseits $I \sim \frac{1}{r^2}$ aber auch $I \sim A_0^2$. Insgesamt ist also

$$A_0 \sim \sqrt{I} \sim \frac{1}{r} \tag{2.5}$$

wodurch die Kugelwelle so aussieht wie in Gl.2.2.

Am Detektor messen wir die Intensität (Wahrscheinlichkeitsverteilung), also die Energierate. Die erste Beobachtung die wir machen ist, dass die Intensität am Detektor jeden beliebigen Wert annehmen kann, abhängig von der Bewegung der Quelle. Entsprechend besteht hier keine „Klumpigkeit“ im Verhalten der Wellenintensität wie wir es bei den Kugeln beobachtet haben. Nun messen wir die Intensität für verschiedene x -Werte und erhalten folgendes Muster:



Wie kommt dieses Muster zustande?

Beobachten wir die Wellen die die Spalte an der Wand erreichen, sehen wir, dass diese an den Löchern gebeugt werden und sich neue Kreisförmige Wellen von jedem Loch ausbreiten.

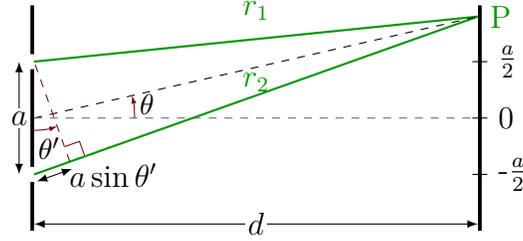
$$\psi_1 = \frac{A_0}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \tag{2.6}$$

$$\psi_2 = \frac{A_0}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} \tag{2.7}$$

Wir wollen die Intensität

$$I_{12} \propto |\psi_1 + \psi_2|^2 \quad (2.8)$$

bestimmen.



Das Betragsquadrat der Summe der Wellen ist

$$|\psi_1 + \psi_2|^2 = \left| \frac{A_0}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{A_0}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} \right|^2 \quad (2.9)$$

$$= |A_0|^2 \left| \left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right) e^{-i\omega t} \right|^2 \quad (2.10)$$

$$= |A_0|^2 e^{-i\omega t} e^{i\omega t} \left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right) \left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right) \quad (2.11)$$

$$= |A_0|^2 \left(\frac{e^{ikr_1} e^{-ikr_1}}{r_1^2} + \frac{e^{ikr_1} e^{-ikr_2}}{r_1 r_2} + \frac{e^{ikr_2} e^{-ikr_1}}{r_2 r_1} + \frac{e^{ikr_2} e^{-ikr_2}}{r_2^2} \right) \quad (2.12)$$

$$= |A_0|^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{e^{ik(r_1 - r_2)}}{r_1 r_2} \right) \quad (2.13)$$

$$= |A_0|^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2 \cos(ik(r_1 - r_2))}{r_1 r_2} \right) \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

wobei

$$r_1 = \sqrt{d^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{r_1^2} \simeq \frac{1}{d^2 + x^2} \quad (2.16)$$

$$r_2 = \sqrt{d^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{r_2^2} \simeq \frac{1}{d^2 + x^2} \quad (2.17)$$

für $a \ll x, d$. Mit

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \quad \& \quad \sin \theta' = \frac{r_2 - r_1}{d} \quad (2.18)$$

und $\theta \approx \theta'$ folgt

$$r_2 - r_1 = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + d^2}} \quad (2.19)$$

und damit

$$\cos(k(r_1 - r_2)) = \cos\left(\frac{kax}{\sqrt{x^2 + d^2}}\right) \quad (2.20)$$

und

$$\frac{1}{r_1 r_2} \simeq \frac{1}{(\sqrt{x^2 + d^2})^2} = \frac{1}{d^2 + x^2}. \quad (2.21)$$

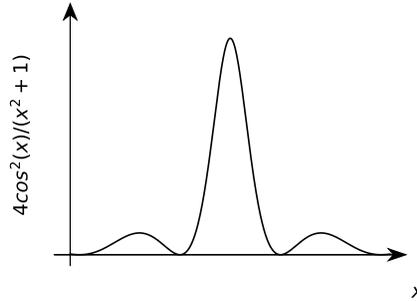
Insgesamt ist die Intensität

$$I_{12} \propto |A_0|^2 \left(\frac{1}{d^2 + x^2} + \frac{1}{d^2 + x^2} + \frac{2 \cos\left(\frac{kax}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right)}{d^2 + x^2} \right) \quad (2.22)$$

$$= |A_0|^2 \left(\frac{2}{d^2 + x^2} + \frac{2}{d^2 + x^2} \cos\left(\frac{kax}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right) \right) \quad (2.23)$$

$$= \frac{2|A_0|^2}{d^2 + x^2} \underbrace{\left(1 + \cos\left(\frac{kax}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right) \right)}_{2 \cos^2\left(\frac{kax}{2\sqrt{d^2 + x^2}}\right)} \quad (2.24)$$

$$= 4|A_0|^2 \frac{\cos^2\left(\frac{kax}{2\sqrt{d^2 + x^2}}\right)}{d^2 + x^2}. \quad (2.25)$$



Wir sehen, dass „Interferenz“ zwischen Wellen stattfindet. Betrachten wir die Wellen durch jedes Loch einzeln indem wir ein Loch abdecken, so erhalten wir wieder das Muster aus (b). Die einzelnen Intensitäten sind

$$I_1 \propto |\psi_1|^2 = \frac{|A_0|^2}{r_1^2} \simeq \frac{|A_0|^2}{d^2 + x^2} \quad (2.26)$$

$$I_2 \propto |\psi_2|^2 = \frac{|A_0|^2}{r_2^2} \simeq \frac{|A_0|^2}{d^2 + x^2} \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

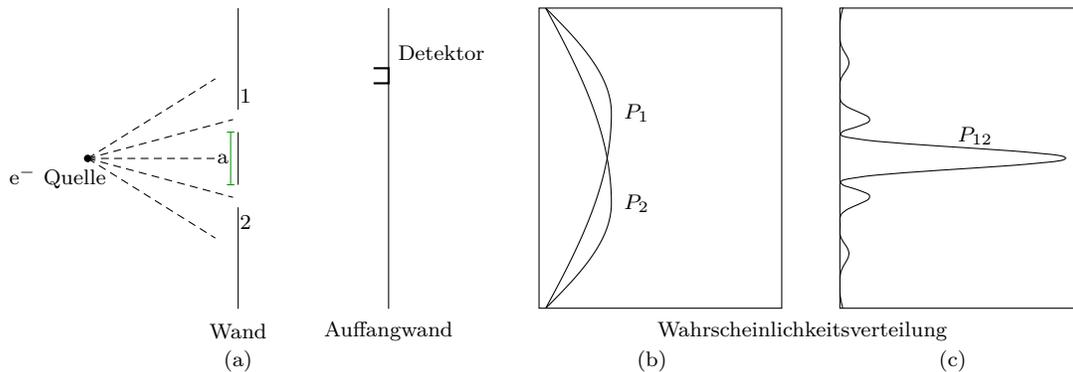
entsprechend finden wir das

$$I_{12} = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \cos\left(\frac{kax}{\sqrt{d^2 + x^2}}\right)}_{\text{Interferenzterm}} \quad (2.29)$$

Erkenntnis

Wellen am Doppelspalt können jeden Wert annehmen und zeigen *Interferenz*.

3 Ein Experiment mit Elektronen



Wir ersetzen nun die Wellenquelle durch einen Elektronenabwerfer. Dieser besteht aus einem Wolframdraht, welcher erhitzt wird, und ein Metallgehäuse mit einem Loch. Ist der Draht gegenüber dem Metallgehäuse negativ geladen, so werden die aus dem Draht freigesetzten Elektronen zu den Wänden des Metallgehäuses beschleunigt und einige treten aus dem Loch aus. Alle Elektronen aus dem Loch werden ungefähr die selbe Energie haben. An der Auffangwand befindet sich ein Detektor der bspw. ein Elektronenvervielfacher ist welcher an einem Lautsprecher angeschlossen ist. Jedes Mal wenn etwas am Detektor ankommt hören wir ein *Klick*. Alle *Klicks* die wir hören sind gleich. Wir hören keine *halbklicks*. Die *Klicks* sind zwar sehr ungleichmäßig:

Klick... Klick-Klick... Klick... Klick... Klick ... Klick-Klick...

zählen wir aber die *Klicks* innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls, von bspw. einer Minute, so ist diese Anzahl ziemlich genau gleich. Wir können also von einer durchschnittlichen „*Klickrate*“ sprechen. Bewegen wir den Detektor, so ändert sich die Rate, aber die Lautstärke (Größe) der *Klicks* bleibt immer gleich. Auch bei Veränderung der Drahttemperatur wird die rate schneller oder langsamer, aber die *Klicks* sind immer gleich. Stellen wir nun zwei Detektoren auf, so nehmen wir Zeitgleich immer nur ein *Klick* aus einem der beiden Detektoren war. Wir schließen also daraus, dass was an der Auffangwand ankommt in gleich großen „Klumpen“ ankommt und immer nur einer auf einmal.

Jetzt schauen wir uns die Rate über die gesamte Auffangwand an, also die relative Wahrscheinlichkeit, dass ein „Elektronklumpen“ an einem Ort x an der Auffangwand ankommt. Das Ergebnis ist das Interferenzmuster in (c), das aus dem Experiment mit den Wellen!

Aber wie kann das sein? Aus den *Klicks* die wir wahrnehmen würden wir schließen, dass sich die Elektronen, welche in „Klumpen“, gleicher Größe einzeln auf der Auffangwand auftreffen, sich wie im Experiment mit Kugeln verhalten. Schließen wir jeweils ein Loch und messen

dann die Rate über die Gesamte Auffangwand, so erhalten wir tatsächlich die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_1 und P_2 aus (b). Entsprechend gilt für Elektronen

$$P_{12} \neq P_1 + P_2. \quad (2.30)$$

Am Doppelspalt nehmen wir also Interferenz von Elektronen war.

Soweit sind wir von einfachen Wegen der Elektronen durch ein Loch und direkt zur Auffangwand ausgegangen. Nehmen wir kurz an es ist nicht so. Vielleicht laufen manche Elektronen durch Loch 1, kehren um und gehen durch Loch 2 und laufen ein paarmal durch die Löcher hin und her bevor sie zur Auffangwand gelangen. Wenn wir Loch 2 geschlossen haben können somit einige Elektronen aus Loch 1 nicht zur Auffangwand gelangen. Dies steht allerdings im Widerspruch zur Auffangrate aus (b) und (c), da (b) an einigen Stellen mehr Elektronen aufweist als in (c), so dass das schließen eines Loches die Anzahl an Elektronen erhöhen würde. Auch ist am Ort $x = 0$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{12} > P_1 + P_2$.

Erkenntnis

Elektronen kommen in „Klumpen“, also wie Kugeln, an der Auffangwand an und die Ankunfts-wahrscheinlichkeit ist die einer Welle.

Folgerung

Manchmal verhalten sich Elektronen wie Kugeln und manchmal wie Wellen.

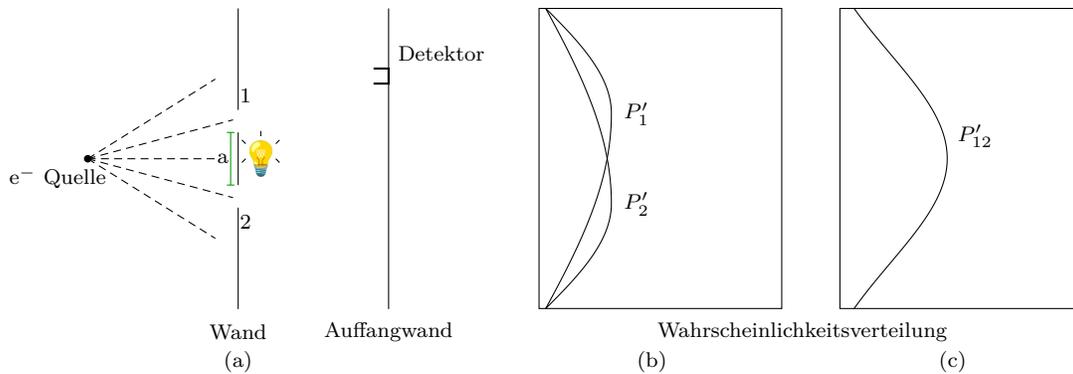
3.1 Genauere Beobachtung der Elektronen

Wie kann das sein, dass wir anhand der *Klicks* ein Kugel- bzw. Teilchenverhalten wahrnehmen, die Ankunfts-wahrscheinlichkeit jedoch der einer Welle entspricht? Was passiert hier genau am Spalt?

Wir wollen es genauer wissen und stellen zur Überprüfung eine Lichtquelle zwischen den beiden Löchern in der Wand auf. Wenn Elektronen vorbeifliegen, streuen sie das Licht und wir sehen welchem Weg das Elektron gefolgt ist. Wir werden feststellen, dass wir mit jedem *Klick* ein Lichtblitz sehen. Entweder bei Loch 1 oder bei Loch 2. Niemals gleichzeitig!

Vor der Auffangwand beobachten wir also ein klassisches Teilchenverhalten. Warum ist dann $P_1 + P_2 \neq P_{12}$?

Wir schauen uns also nochmal die Ankunfts-wahrscheinlichkeit am Detektor an während wir die Elektronen mithilfe der Lichtquelle genau beobachten. Mit jedem *Klick*, könne wir das Ereignis „am Ort x auf der Auffangwand angekommene Elektron“ einem Spalt zuordnen durch welches es geflogen kommt. Die Ankunfts-wahrscheinlichkeit aus Spalt 1 bezeichnen wir mit P'_1 und aus Spalt 2 mit P'_2 . Wiederholen wir die Messung für viele x -Werte, erhalten wir die folgenden Verteilungen.



Das Ergebnis ist nicht sehr überraschen, denn wir finden beim genauen hinschauen ein Teilchenverhalten mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen P'_1 und P'_2 welche P_1 und P_2 sehr ähneln. Wie sieht denn nun die Gesamtwahrscheinlichkeit aus? Da wir die Wahrscheinlichkeiten P'_1 und P'_2 durch die Zuordnung jedes an der Auffangwand auftreffende Elektron erhalten haben, ist

$$P'_{12} = P'_1 + P'_2, \quad (2.31)$$

also genau wie P_{12} für Kugeln.

Erkenntnis

Die Verteilung der Elektronen ist anders wenn wir sie beobachten als wenn wir sie nicht beobachten.

Das Ergebnis könnte natürlich auch an unserer Lichtquelle liegen. Vielleicht ändert das Licht den Pfad eines Elektrons, indem es eine Kraft ausübt und das Elektron in eine andere Richtung lenkt. Drehen wir also die Helligkeit des Lichts runter, um die Elektronen nicht so sehr zu stören. Wir beobachten erst mal, dass die Lichtblitze, die von den Elektronen gestreut werden, schwächer sind als vorher. Die Blitze sind aber immer gleich groß. Was aber nun passiert ist, dass wir manchmal ein *Klick* hören ohne einen Blitz zu sehen. Was wir hier beobachten, ist die „Klumpigekeit“ des Lichts wie bei Elektronen. Es kommt als „Klumpen“ an, welches wir Photon nennen, und wird gestreut. Wenn wir die Intensität der Lichtquelle runter drehen, verändern wir nicht die „Größe“ sondern die Rate der Photonen. Bei einer schwachen Rate kann es nun mal vorkommen, dass gerade kein Photon da ist welches an dem Elektron gestreut werden kann und es fliegt einfach ungesehen weiter. Ein gesehenes Elektron ist also **immer** gestört. Schauen wir uns hier nochmal die Wahrscheinlichkeitsverteilung an. Jene Elektronen die durch Spalt 1 fliegen, jene die durch Spalt 2 fliegen, und der Rest der nicht vor der Auffangwand registriert wird. Wir werden beobachten, dass die Elektronen durch Spalt 1 eine Verteilung wie P'_1 haben, die durch Spalt 2 eine Verteilung wie P'_2 und die die wir gar nicht gesehen haben folgen einer Verteilung wie P'_{12} !

Folgerung

Wenn wir die Elektronen nicht sehen, erhalten wir Interferenz!

Gibt es denn irgendeine Möglichkeit die Elektronen zu sehen, ohne sie zu stören? Drehen wir die Intensität des Lichts runter, so stören weniger Photonen die Elektronen, aber die Störung ist immer gleich „groß“. Im Photoeffekt haben wir gesehen, dass das Licht gequantelt ist, Die Energie eines Photons nimmt einen bestimmte Wert, abhängig von der Wellenlänge des Lichts, an

$$E = h \cdot f = \frac{h}{\lambda}. \quad (2.32)$$

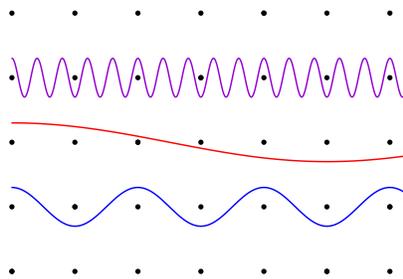
Entsprechend ist der Impuls

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{c\lambda}. \quad (2.33)$$

Wir messen in der Quantenmechanik in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit, setzten also $c = 1$, und haben damit

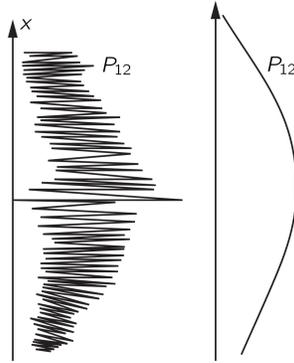
$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (2.34)$$

Diese Beziehung nennt sich die De-Broglie Wellenlänge. Diese Wellenlänge ordnet jedem Teilchen mit dem Impuls p eine Wellenlänge λ zu. Wenn eine Störung eines Elektrons durch den Stoß mit einem Photon geschieht, dann können wir die Störung verringern, indem wir den Impuls p der Photonen verringern. Wir tauschen also die Quelle durch eine langwellige Lichtquelle aus. Wir merken, dass sich die Verteilung P'_{12} langsam der Verteilung P_{12} annähert. Allerdings sehen wir aufgrund der großen Wellenlänge nur noch einen großen verschwommenen Blitz anhand dem wir nicht genau sagen können ob das Elektron aus Spalt 1 oder Spalt 2 gekommen ist. Aufgrund der Wellennatur, gibt es eine Grenze dafür wie nah zwei Punkte sein können um noch unterscheidbar zu sein.



Jetzt haben wir aber auch wirklich alles versucht und es bleibt dabei, dass wir nur ein Interferenzmuster sehen, wenn die Elektronen auf ihrem Weg nicht genau beobachtet werden.

Heisenberg schlug als allgemeines Prinzip das „Unbestimmtheitsprinzip“ vor um diese Phänomen zu erklären. Unsere Naturgesetze sind nur solange gültig wie unsere Apparatur mit der wir messen eine gewisse *Unschärfe* aufweist. Entweder messen wir die Interferenz von Elektronen, ohne deren genauen Weg zu kennen, oder wir kennen deren Ort der Elektronen, erhalten aber keine Interferenz. Das Unbestimmtheitsprinzip hat bis jetzt niemand umgehen können, entsprechend müssen wir davon ausgehen, dass es eine grundsätzliche Eigenschaft



der Natur ist.

Gehen wir noch einmal zum Anfang zurück und schauen uns das Experiment mit den Kugeln an. Wenn alle Materie eine Wellenlänge zugeordnet werden kann und ein Wellenverhalten aufweist, warum sehen wir dann keine Interferenz bei den Kugeln?

Tatsächlich liegt auch Interferenz bei den Kugeln vor. Allerdings ist die Wellenlänge so klein, dass die Interferenzlinien sehr fein und die Maxima und Minima so nah beieinander liegen, dass diese kaum unterscheidbar sind. Jeder Detektor kann diese Feinheiten nicht wahrnehmen und das Ergebnis ist eine ausgeglättete Kurve.

4 Grundprinzip der Quantenmechanik

Ein sehr wichtiger und ausschlaggebender Unterschied zwischen der Klassischen- und der Quantenmechanik ist, dass wir in der Quantenmechanik immer von Wahrscheinlichkeiten sprechen. Wir müssen unsere Tendenz über Ereignisse Vorhersagen zu wollen was unter vorgegebenen Umständen passiert, so wie wir es aus der klassischen Mechanik gewohnt sind, aufgeben. Wir können immer nur die Chance Voraussagen, dass unter bestimmten Anfangsbedingungen etwas passiert.

Zusammenfassung:

Haben wir folgende Gegebenheiten

$$\psi = \text{Wahrscheinlichkeitsamplitude eines Ereignisses (Wellenfunktion)} \quad (2.35)$$

$$P = |\psi|^2 = \text{Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses} \quad (2.36)$$

so gelten folgende Aussagen:

1. Wenn ein Ereignis auf mehreren Weisen auftreten kann (Interferenz), gilt:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (2.37)$$

$$P = |\psi_1 + \psi_2|^2 \quad (2.38)$$

2. Wenn ein Ereignis auf genau einer (beobachteten) Weise passiert, gilt:

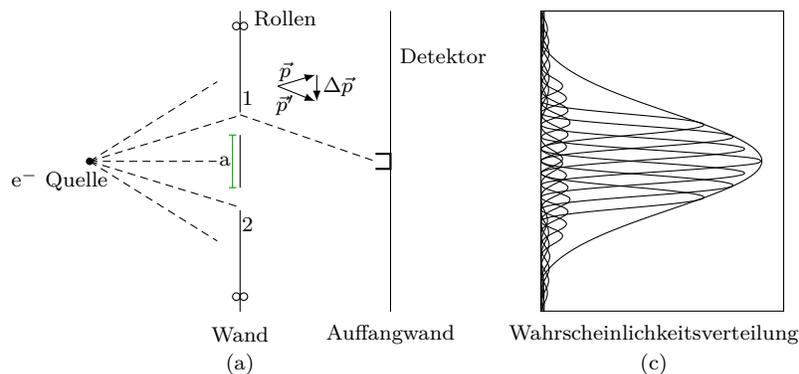
$$P = P_1 + P_2 \quad (2.39)$$

5 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Die Heisenbergsche Unschärferelation lautet:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h \quad (2.40)$$

wobei h dem Planckschen Wirkungsquantum entspricht. In Worten beschrieben besagt es, dass ein Objekt, dessen x-Komponente des Impulses mit einer Genauigkeit Δp bestimmt werden kann, nicht genauer als $\Delta x = \frac{h}{\Delta p}$ lokalisiert werden kann. Wir führen dazu folgendes Experiment durch:



Wir stellen die Wand mit den Spalten durch Rollen gestützt auf, so dass diese sich frei auf und ab bewegen kann. Den Detektor platzieren wir bei $x = 0$. Trifft ein Elektron auf Spalt 1, wird es durch den Stoß an der Wand nach unten gelenkt. Die Differenz des Impulses vor und nach dem Stoß des Elektron Δp zeigt in vertikale Richtung. Aufgrund des Stoßes wird die Wand nach oben bewegt. Wir können also anhand der Bewegung der Wand Δp bestimmen und registrieren, durch welchen Spalt das Elektron geflogen ist, ohne dieses zu stören. Beim Durchgang durch Spalt 2 bewegt sich die Wand nach Unten. Aufgrund der Unschärferelation kann der Ort der Wand nicht mit beliebiger Genauigkeit angegeben werden. Entsprechend können wir aber auch nicht sagen, wo genau sich die zwei Spalte befinden. Der Mittelpunkt unseres Interferenzbildes ändert sich somit mit jedem Elektron welches an der Wand anstößt. Die Verschiebung Δx im Interferenzmuster wird gerade so groß sein, dass sich die Maxima und Minima überlagern und wir am Ende ein verschmiertes Bild sehen in dem wir keine Interferenz beobachten können.

Das Unbestimmtheitsprinzip schützt in diesem Sinne die Quantenmechanik. Diese Relation zwischen Ort und Impuls hat selbst für größere Objekte Bestand und bis jetzt ist es noch nie jemandem gelungen, Ort und Impuls eines Objektes mit größerer Genauigkeit zu messen.

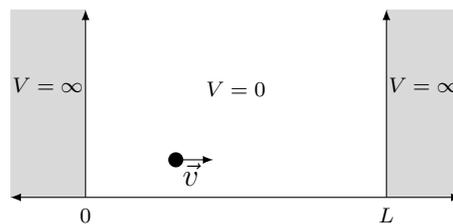
KAPITEL 3

TEILCHEN IN DER BOX: DIE SCHRÖDINGERGELEICHUNG

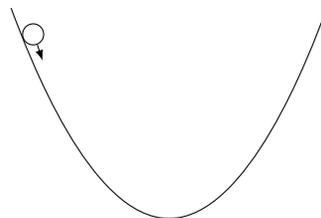
Stellen wir uns ein Teilchen in einer unendlich hohen Box der Breite L vor. Das Teilchen kann sich innerhalb der Box bewegen. Die Bewegung kommt durch die Energie des Teilchens zustande, welche die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.1)$$

ist und durch die Box, ein sogenannter Potentialkasten, ein Spezialfall eines Potentialtopfes, welcher die Bewegung beschränkt.



Ein Potential beschreibt die Wirkung eines Feldes, z.B. das elektrische Feld einer Ladung oder dem Gravitationsfeld der Erde, auf ein Objekt, z.B. einer Ladung oder einer Masse. Wir können ein Potential als einen äußeren Einfluss verstehen, der die Bewegung in gewisser Weise beeinflusst. Ein vereinfachtes Beispiel wäre eine Murmel in einer Schüssel oder ein*er Skater*in die/der eine Halfpipe entlang skated.



Der Weg und die Reichweite der Murmel sind durch die kinetische Energie (Geschwindigkeit) und der Schüssel gegeben.

Kommen wir zurück zu unserem Teilchen in der Box, welches wir als eindimensionales Modell betrachten. Die Box ist ein Kastenpotential, welches das Potential $V = 0$ im Inneren besitzt und $V = \infty$ außerhalb der Box.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & x \leq 0, x \geq L. \end{cases} \quad (3.2)$$

Im Inneren wirkt aufgrund des fehlenden Potentials keine Kraft auf das Teilchen,

$$F \sim \frac{dV}{dx} = 0, \quad (3.3)$$

wodurch das Teilchen ohne Energieverlust und mit konstanter Geschwindigkeit in der Box bewegen kann. Da das Potential außen unendlich groß ist, kann das Teilchen die Box nicht verlassen und prallt an den Wänden einfach ab. Das Teilchen besitzt einen Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{bzw.} \quad p = mv. \quad (3.4)$$

Wir können mit dieser Beziehung die kinetische Energie aus Gl.(3.1) durch den Impuls ausdrücken, indem wir $v = p/m$ einsetzen:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.5)$$

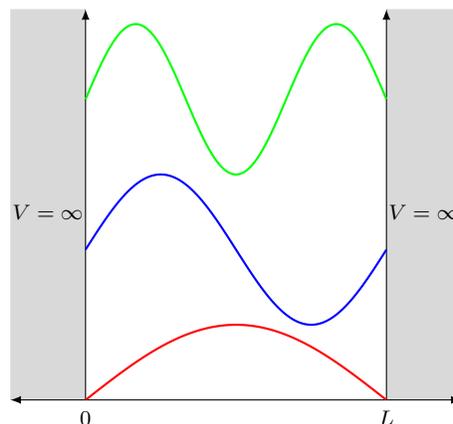
Aus dem Doppelspaltexperiment wissen wir auch, dass sich das Teilchen als Welle darstellen lässt und eine De-Broglie Wellenlänge besitzt

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (3.6)$$

Setzen wir diese Gleichung in die Kinetische Energie aus Gl.(3.5) ein, so erhalten wir

$$E = \frac{(h/\lambda)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}. \quad (3.7)$$

Die Energie hängt also von der Wellenlänge ab. Schauen wir uns eine ebene Welle in der Box an. Durch das unendlich große Potential außerhalb der Box, also den unendlich hohen Wänden, passen nur solche Wellen in die Box, die ein ganzzahliges Vielfaches ihrer halben Wellenlänge groß sind. Anschaulich lässt sich das durch ein Seil darstellen welches wir an den Wänden der Box befestigt haben. Regen wir das Seil an das es eine Welle schlägt, werden wir feststellen, dass aufgrund der befestigten Enden, was als Randbedingung bezeichnet wird, nur solche Wellen entstehen können, die an beiden Enden auf selber Höhe liegen.



Wir folgern also, dass gelten muss

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Eingesetzt in die Energiegleichung (3.7) ergibt das

$$E_n = \frac{h^2}{4mL^2} \cdot n^2 \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Teilchen in einer Box mit unendlich hohen Wänden haben also nur bestimmte, von n abhängige, diskrete Energien. Dies ist ein sehr vereinfachtes Modell welches zum Verständnis und der Berechenbarkeit der Energieniveaus von Elektronen im Atom verwendet wird. Das Potential eines Atoms sieht zwar anders aus, besitzt aber auch diskrete Energieniveaus. Wir sagen die Energiezustände im Atom sind quantisiert und den Übergang eines Elektrons von einem Energieniveau zum anderen wird Quantensprung genannt.

Wir haben die Wellennatur von Teilchen verwendet, um die Energieniveaus im Kastenpotential zu bestimmen. Die Energien sind dabei durch die kinetische Energie und dem Potential in dem sich das Teilchen befindet, gegeben. Entsprechend haben wir einen Mechanismus der aus Wellenfunktion, der kinetischen Energie und dem Potential, die diskreten Energieniveaus liefert, die das Teilchen einnehmen kann.

$$\psi, E_{kin}, V \longrightarrow \boxed{\text{Mechanismus}} \longrightarrow E_n$$

Anders gesagt nehmen wir eine ebene Welle (Teilchen)

$$\psi(x) = Ae^{i(kx-\omega t)} \quad (3.10)$$

und wenden darauf die kinetische Energie und das Potential an, so erhalten wir die von diesem Teilchen erlaubten diskreten Energien

$$(E_{kin} + V) \cdot \psi = E_n \cdot \psi. \quad (3.11)$$

Diese Gleichung heißt Schrödinger-Gleichung und gilt für beliebige Teilchen der Masse m in einem beliebigen Potential V . Da die kinetische Energie eine Eigenschaft des Teilchens ist und das Teilchen durch die Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben wird, ergibt sich die Frage, ob der kinetische Anteil der Schrödinger-Gleichung durch die Wellenfunktion beschrieben werden kann. Schauen wir uns die kinetische Energie aus Gl.(3.7) etwas genauer an. Wir wissen, dass die Wellenlänge λ einer Welle von der Wellenzahl k abhängt

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (3.12)$$

Eingesetzt in Gl.(3.7) wird die Energie zu

$$E = \frac{h^2 k^2}{(2\pi)^2 2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3.13)$$

wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ das sogenannte reduzierte Plancksche Wirkungsquantum ist. Aus der Mathevorlesung wissen wir, dass

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} = -k^2 e^{ikx} \quad (3.14)$$

gilt. Entsprechend ist

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{d^2}{dx^2} A e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.15)$$

$$= -k^2 \cdot A e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.16)$$

$$= -k^2 \psi(x). \quad (3.17)$$

Wir erhalten also die kinetische Energie, indem wir die Wellenfunktion zwei Mal nach dem Ort x ableiten und mit den konstanten $-\hbar^2/(2m)$ multiplizieren

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(x). \quad (3.18)$$

Bemerkung: die sogenannte Dispersionsrelation gibt den Zusammenhang zwischen Wellenzahl k und Impuls p

$$p = \hbar k \quad (3.19)$$

und zwischen den Energie und der (Kreis-)Frequenz ω

$$E = \hbar \omega \quad (3.20)$$

Da wir in der Quantenmechanik in Einheiten von \hbar rechnen, wird $\hbar = 1$ gesetzt und entsprechend können wir eine ebene Welle, welche ein Teilchen beschreibt auch als

$$\psi = A e^{i(px - Et)} \quad (3.21)$$

schreiben, wobei wir den Zusammenhang

$$p \leftrightarrow k \quad (3.22)$$

$$E \leftrightarrow \omega \quad (3.23)$$

verwendet haben.

Unser Mechanismus zur Bestimmung von Energieniveaus wird also durch die Schrödinger-Gleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \psi = E_n \psi \quad (3.24)$$

bzw.

$$\left(-\frac{p^2}{2m} + V \right) \psi = E_n \psi \quad (3.25)$$

beschrieben.

KAPITEL 4

AHARANOV-BOHM EFFEKT

Stellen wir uns vor, eine elektrische Ladung e der Masse m bewegt sich mit dem Impuls p entlang einer Geraden - zum Beispiel ein Elektron in einem Draht - im ansonsten leeren Raum. Wie wir schon wissen, ist die Wellenfunktion so einer Ladung gegeben durch

$$\psi = A \cdot e^{i(px-Et)} \quad (4.1)$$

und erfüllt die Schrödingergleichung

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V \right) \psi = E\psi \quad (4.2)$$

sodass

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad (4.3)$$

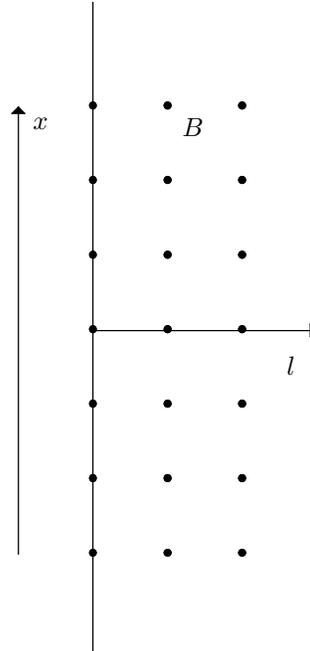
. Schalten wir nun ein konstantes Magnetfeld B ein, das normal auf die Richtung steht, in die sich das Elektron bewegt. Wie wir wissen, wird nun eine Kraft auf die Ladung ausgeübt, nämlich die Lorentzkraft

$$F = e \cdot v \cdot B \quad (4.4)$$

die normal sowohl zur Richtung des Magnetfeldes als auch des Drahtes zeigt. Mit der Beziehung $p = m \cdot v$ können wir diese Kraft auch mit dem Impuls ausdrücken, nämlich

$$F = \frac{e}{m} \cdot p \cdot B \quad (4.5)$$

Bewegen wir nun den Draht ein Stück l zur Seite - entlang der Richtung, in die die Lorentzkraft zeigt.



Da dies eine Bewegung in die Richtung ist, in der die Lorentzkraft zeigt, verrichten wir Arbeit, nämlich

$$W = F \cdot l = \frac{e}{m} \cdot p \cdot B \cdot l \quad (4.6)$$

die eine zusätzliche Energie in unserem System darstellt. Entsprechend ist nun die Energie

$$E_{neu} = E + W = \frac{p^2}{2m} + V + \frac{e}{m} \cdot p \cdot B \cdot l \quad (4.7)$$

die wieder in die ursprüngliche Form

$$E_{neu} = \frac{p_{neu}^2}{2m} + V_{neu} \quad (4.8)$$

gebracht werden kann, wobei p_{neu} der neue Impuls und V_{neu} das neue Potential ist. Diese erfüllen nun wieder die Schrödingergleichung, diesmal allerdings mit der Wellenfunktion

$$\psi_{neu} = A \cdot e^{i(p_{neu}x - E_{neu}t)} \quad (4.9)$$

Betrachten wir nun die alte und neue Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$. Wenn wir den Ausdruck für p_{neu} einsetzen, so sehen wir, dass

$$\psi_{neu}(t = 0) = \psi(t = 0) \cdot e^{i\Delta\varphi}. \quad (4.10)$$

Wir finden also, dass es einen Phasenunterschied zwischen der alten und neuen Wellenfunktion gibt. Dieser Phasenunterschied von $\Delta\varphi$ entsteht, wenn das Elektron den neuen Weg durch den verschobenen Draht zurücklegt anstatt den ursprünglichen. Interessant ist, dass $l \cdot x$ nichts anderes ist als die Fläche, die zwischen neuem und altem Weg liegt, und in der das

Magnetfeld B herrscht, das normal zu dieser Fläche steht. Der Gesamte Ausdruck $B \cdot l \cdot x$ ist also das Magnetfeld, multipliziert mit der Fläche, durch die es durchtritt. Diese Größe nennt man magnetischen Fluss, das Symbol ist Φ_M . Insgesamt finden wir, dass es einen zusätzlichen Phasenunterschied

$$\Delta\varphi = e \cdot \Phi_M \quad (4.11)$$

zwischen zwei Pfaden gibt, wenn ein magnetischer Fluss Φ_M die Fläche zwischen diesen Pfaden durchfließt. Diese Beziehung gilt ganz allgemein und ist als Aharonov-Bohm Effekt bekannt. Interessanterweise gilt sie sogar dann, wenn das Magnetfeld nur die Fläche zwischen den Pfaden durchquert, die Pfade selbst, und damit die Elektronen, nie kreuzt.