

Physikschule

BUW WiSe 24/25

First Edition

**J. Besproswanny¹, B. Bornmann¹, N. Chreim¹, F. Frech¹, C. Hess¹, C.
Hoelbling¹**

¹Bergische Universität Wuppertal



INHALTSVERZEICHNIS

Inhaltsverzeichnis	3
I Mathematische Grundlagen	5
1 Komplexe Zahlen	7
1 Quadratische Gleichungen	7
2 Die imaginäre Einheit i und die komplexe Zahlenebene	9
3 Rechnen mit komplexen Zahlen	9
4 Polarkoordinaten	12
5 Spezielle Funktionen I	14
2 Differentialrechnung	17
1 Die Ableitung	17
2 Rechenregeln für Ableitungen	19
3 Vektorrechnung	23
1 Motivation	23
2 Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$	23
3 Spezielle Vektoroperationen im $\mathbb{R}^3$	26
II Quantenmechanik	29
1 Quantisierung: Der Photoeffekt	31
2 Quantenverhalten: Doppelspaltexperiment und Unschärferelation	37
1 Ein Experiment mit Kugeln	37
2 Ein Experiment mit Wellen	38
3 Ein Experiment mit Elektronen	42
3.1 Genauere Beobachtung der Elektronen	43
4 Grundprinzip der Quantenmechanik	46
5 Die Heisenbergsche Unschärferelation	47
3 Teilchen in der Box: Die Schrödingergleichung	49
4 Aharanov-Bohm Effekt	53
III Supraleitung	57
1 Einleitung - Historischer Überblick	59

2	Kuprat-Supraleiter	67
1	Materialien	67
3	Phänomenologie der Supraleitung	71
1	Verschwinden des elektrischen Widerstands	71
2	Perfekter Diamagnetismus	77
3	Die Londonschen Gleichungen	78
3.1	Vertiefung: London-Gleichungen und quantenmechanische Motivation	83
4	Flussquantisierung	83
5	Kritische Magnetfelder	86
6	Energielücke der Supraleiter	88
	Literatur	89

Teil I

Mathematische Grundlagen

KAPITEL 1

KOMPLEXE ZAHLEN

1 Quadratische Gleichungen

Um an einem Punkt zu starten, mit dem alle Schüler der Oberstufe vertraut sein sollten, beginnen wir mit einer kurzen Wiederholung zu quadratischen Gleichungen.

Definition 1.1: Quadratische Funktion

- Eine quadratische Funktion f bildet eine reelle Zahl x auf eine andere reelle Zahl $f(x)$ ab, gemäß der Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (1.1)$$

wobei a_0 , a_1 und a_2 beliebige aber feste reelle Zahlen sind, mit der Einschränkung $a_2 \neq 0$.

- Die Gleichung

$$f(x_0) = 0 \quad (1.2)$$

mit einer quadratischen Funktion f heißt *quadratische Gleichung*. x_0 nennt man auch die Nullstelle von f .

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass man f mit einer beliebigen Konstante $c \neq 0$ multiplizieren kann und dies die Nullstellen nicht verändert. Es ist häufig zweckmäßig $c = \frac{1}{a_2}$ zu wählen. Die Funktion cf nimmt dann die Form

$$cf(x) = \frac{1}{a_2}f(x) = x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} =: x^2 + px + q \quad (1.3)$$

an. Mit dieser Darstellung lässt sich dann folgendes Theorem leicht beweisen.

Theorem 1.2: $p - q$ -Formel

Sei f eine quadratische Funktion.

- Wenn $4q > p^2$, hat f *keine* Nullstelle.
- Wenn $4q = p^2$, hat f *eine* Nullstelle, die gegeben ist durch

$$x_0 = -\frac{p}{2}. \quad (1.4)$$

- Wenn $4q < p^2$, hat f *zwei* Nullstellen, die gegeben sind durch

$$x_0^a = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad (1.5)$$

$$x_0^b = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (1.6)$$

Beweis.

Übungsaufgabe.

Beispiel : Einfache quadratische Gleichungen

•

$$f(x) = x^2 - 1$$

Da $p = 0$ und $q = -1$ gilt, trifft der dritte Fall zu und die Nullstellen sind 1 und -1 .

•

$$f(x) = x^2$$

Da $p = 0$ und $q = 0$ gilt, trifft der zweite Fall zu und die Nullstellen ist 0.

•

$$f(x) = x^2 + 1$$

Da $p = 0$ und $q = 1$ gilt, trifft der erste Fall zu es gibt keine Lösung.

2 Die imaginäre Einheit i und die komplexe Zahlenebene

Es ist zweckmäßig nun eine neue Zahl i zu definieren, die eine Nullstelle von $f(x) = x^2 + 1$ ist. Es gilt also

$$i^2 = -1 \quad (1.7)$$

und man kann direkt nachrechnen, dass $-i$ dieselbe Eigenschaft hat. Beide Zahlen i und $-i$ sind offensichtlich keine reellen Zahlen und deswegen kann man sie auch nicht auf dem Zahlenstrahl finden. Wir lösen dieses Problem, indem der Zahlenstrahl um eine senkrechte Achse erweitert wird, auf der wir i und $-i$ finden. Veranschaulicht wird dies auf der linken Seite in Abbildung 1.1.

Durch das Verwenden der gesamten Ebene lassen sich nun auch Summen von reellen Zahlen mit imaginären Zahlen definieren. Wie man auf der rechten Seite von Abbildung 1.1 sehen kann, befindet sich der Zahlenwert $2+i$ bei den Koordinaten $(2, 1)$ und der Zahlenwert $-3-2i$ bei $(-2, -3)$, bzw. hat $z = x + iy$ im allgemeinen die Koordinaten (x, y) ¹.

Insbesondere gilt nun mit den komplexen Zahlen, dass alle quadratischen Gleichungen ein oder zwei Lösungen haben. Um Beispielsweise die Gleichung $x^2 = i$ zu lösen, braucht man keine zusätzliche Erweiterung des Zahlenraums. Auch die Gleichung

$$x^2 = -n \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

ist nun vollständig lösbar durch $x = \pm i\sqrt{n}$. Viele nennen i auch die Wurzel aus -1 , das ist aber nicht ganz korrekt, da es zu Widersprüchen führen kann wie im folgenden Beispiel:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = \sqrt{(-1)}^2 = i^2 = -1 \quad (1.9)$$

Definition 2.1: Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Dann heißt x der Realteil und y der Imaginärteil von z . Für den Realteil schreibt man auch häufig $\operatorname{Re}(z)$ und für den Imaginärteil $\operatorname{Im}(z)$:

3 Rechnen mit komplexen Zahlen

Natürlich wollen wir mit komplexen Zahl genauso rechnen können, wie wir es mit reellen Zahlen gewohnt sind. Dafür definieren wir nun die Rechenvorschriften.

¹Statt $x + iy$ kann man auch $x + yi$ schreiben.

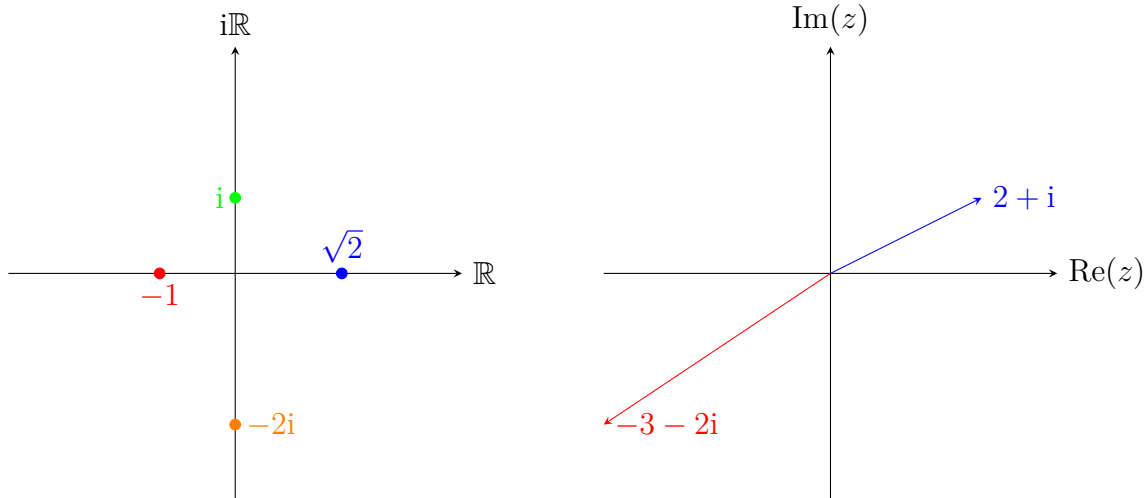


Abbildung 1.1: Auf der rechten Seite der Abbildung sehen wir die imaginäre Achse, die senkrecht auf der reellen Achse steht. Beide Achsen spannen zusammen die komplexe Ebene auf (rechte Seite), auf der wir alle komplexen Zahlen $z = x + iy$ finden.

Definition 3.1: Rechenregeln für komplexe Zahlen

Seien $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$ zwei beliebige aber feste komplexe Zahlen. Dann definieren wir die folgenden Rechenoperationen:

- Addition

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \quad (1.10)$$

- Subtraktion

$$z - z' = (x + iy) - (x' + iy') = (x - x') + i(y - y') \quad (1.11)$$

- Multiplikation

$$z \cdot z' = (x + iy) \cdot (x' + iy') = (x \cdot x' - y \cdot y') + i(x \cdot y' + y \cdot x') \quad (1.12)$$

- Konjugation

$$z^* = x - iy \quad (1.13)$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln.

Theorem 3.2: Rechenregeln für komplexe Zahlen

Seien z , z' und z'' komplexe Zahlen. Dann gilt:

- Kommutativität

$$z \cdot z' = z' \cdot z \quad (1.14)$$

$$z + z' = z' + z \quad (1.15)$$

- Distributivität

$$z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z'' \quad (1.16)$$

- Assoziativität

$$z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z'' \quad (1.17)$$

$$z + (z' + z'') = (z + z') + z'' \quad (1.18)$$

Zur Veranschaulichung folgt ein Beispiel.

Beispiel : Rechnen mit komplexen Zahlen

Sei $z = 2 + i$ und $z' = 3 + 2i$.

$$z + z' = (2 + 3) + (1 + 2)i = 5 + 3i \quad (1.19)$$

$$z - z' = (2 - 3) + (1 - 2)i = -1 - i \quad (1.20)$$

$$z \cdot z' = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + (2 \cdot 2 + 1 \cdot 3)i = 4 + 7i \quad (1.21)$$

$$z^* = 2 - i \quad (1.22)$$

Wie vielleicht schon aufgefallen ist, fehlt hier die Division. Dafür braucht es ein klein wenig Vorarbeit. Wir gucken uns dafür an, was passiert ein Element mit seinem Konjugierten multipliziert wird.

Definition 3.3: Betragsquadrat

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = (x^2 + y^2) + 0i = x^2 + y^2 \quad (1.23)$$

Das Ergebnis ist also eine rein reelle Zahl, die häufig $|z|^2$ genannt wird. Nun können wir beide Seiten der Gleichung durch $|z|^2$ und durch z teilen und erhalten:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (1.24)$$

Damit lässt sich nun die Division von komplexen Zahlen definieren.

Definition 3.4: Division komplexer Zahlen

$$\frac{z'}{z} = z' \cdot \frac{1}{z} = \frac{z'z^*}{|z|^2} \quad (1.25)$$

Beispiel : Division komplexer Zahlen

Sei $z = 2 + i$ und $z' = 3 + 2i$.

$$\frac{z}{z'} = \frac{(2+i)(3-2i)}{3^2 + 2^2} = \frac{8-i}{13} = \frac{8}{13} - \frac{1}{13}i \quad (1.26)$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{(2-i)(3+2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{8+i}{5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i \quad (1.27)$$

4 Polarkoordinaten

Eine komplexe Zahl kann nicht nur über ihren Real- und Imaginärteil definiert werden², sondern auch über ihren Abstand zum Ursprung (Betrag) und den Winkel, den die Ursprungsgerade und die reelle Achse einschließen (Argument). Hier ist drauf zu achten, dass in der Physik (und in der Mathematik) Winkel im Bogenmaß statt im Gradmaß angegeben werden. Um Gradmaß in Bogenmaß umzurechnen multipliziert man mit $\frac{\pi}{180^\circ}$. Um Bogenmaß in Gradmaß umzurechnen multipliziert man mit $\frac{180^\circ}{\pi}$. In Abbildung 1.2 wird die Polardarstellung komplexer Zahlen visualisiert.

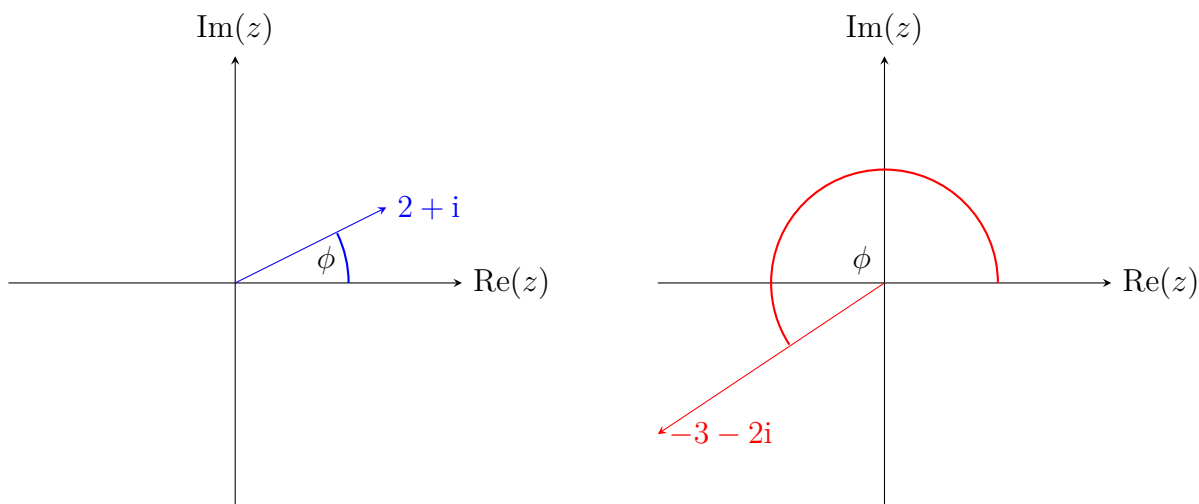


Abbildung 1.2: Veranschaulichung zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinaten. Die Länge des Pfeils entspricht dem Betrag $|z|$ und der vom Bogen eingeschlossene Winkel entspricht dem Argument ϕ

²Dies nennt man auch kartesische Darstellung.

Theorem 4.1: Wechsel zwischen den Koordinaten

Sei z eine komplexe Zahl mit Realteil x , Imaginärteil y , Betrag r und Argument ϕ .

- Um Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umzurechnen, benutzt man die Formeln:

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad (1.28)$$

- Die Umrechnung von kartesischen in Polarkoordinaten ist etwas umständlicher.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Wenn $x = 0 = y$ vorliegt, ist das Argument nicht definiert.

An dieser Stelle sei gesagt, dass die Darstellung in Polarkoordinaten nicht eindeutig ist. ϕ und $\phi + 2\pi n$ für ganze Zahlen n stellen dieselbe Zahl da. Meistens wählt man ϕ dann im Intervall $(-\pi, \pi]$. Für die schnelle Berechnung von Sinus- und Kosinuswerten kann folgende Tabelle helfen:

ϕ [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ϕ [°]	0	30	45	60	90
$\sin \phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos \phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Tabelle 1.1: Tabelle zur schnellen Bestimmung von Werten des Sinus und Cosinus

Beispiel : Wechsel zwischen den Koordinaten

- Sei $z = -1 + i$. Dann sind Betrag und Argument gegeben durch

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad (1.30)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{1}{4}\pi + \pi = \frac{3\pi}{4} \quad (1.31)$$

- Sei $r = 2$ und $\phi = \frac{\pi}{3}$. Dann sind Real- und Imaginärteil gegeben durch

$$x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \frac{1}{2} = 1, \quad (1.32)$$

$$y = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \quad (1.33)$$

5 Spezielle Funktionen I

Im folgenden Kapitel werden Sinus und Kosinus als Funktionen untersucht und es wird die (komplexe) Exponentialfunktion eingeführt.

Definition 5.1: Sinus, Kosinus und Exponentialfunktion

- Der Sinus (im Bogenmaß) ist definiert als

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \quad (1.34)$$

- Der Cosinus (im Bogenmaß) ist definiert als

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \quad (1.35)$$

- Die Exponentialfunktion ist definiert als

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots \quad (1.36)$$

Theorem 5.2: Die Eulersche Identität

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x) \quad (1.37)$$

Insbesondere gilt für $x = \pi$:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (1.38)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(x) + i \sin(x)
\end{aligned}$$

Man kann nun komplexe Zahlen in Polardarstellung wesentlich effizienter schreiben:

$$z = x + iy = r \cos(\phi) + r \sin(\phi)i = r(\cos(\phi) + i \sin(\phi)) = r \exp(i\phi) \quad (1.39)$$

Theorem 5.3: Potenzgesetze

Für die Exponentialfunktion gelten die folgenden Rechenregeln:

- $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$
- $\exp(-x) = 1 / \exp(x)$
- $\exp(x)^\alpha = \exp(\alpha x)$

Theorem 5.4: Symmetrie von Sinus und Kosinus

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad (1.40)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad (1.41)$$

Beweis.

Übungsaufgabe.

Aus dieser Aussage folgt außerdem die Eigenschaft $\exp(-ix) = \cos(x) - i \sin(x)$.

Theorem 5.5: Darstellung von Sinus und Cosinus mittels der Exponentialfunktion

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (1.42)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (1.43)$$

Beweis.

■ Übungsaufgabe. ■

Theorem 5.6: Additionstheoreme

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \quad (1.44)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \quad (1.45)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1.46)$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \quad (1.47)$$

Beweis.

■ Übungsaufgabe. ■

KAPITEL 2

DIFFERENTIALRECHNUNG

1 Die Ableitung

Definition 1.1: Differenzenquotient

Sei f eine beliebige Funktion. Der Differenzenquotient an den Punkten $x \neq y$ ist definiert durch

$$\Delta f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}. \quad (2.1)$$

Anschaulich gesprochen ist der Differenzenquotient die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$.

Definition 1.2: Differentialquotient

Sei f eine beliebige Funktion. Der Differentialquotient am Punkt x ist (sofern er existiert) definiert durch

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2.2)$$

Anschaulich gesprochen ist der Differentialquotient die Steigung der Tangente am Punkt $(x, f(x))$.

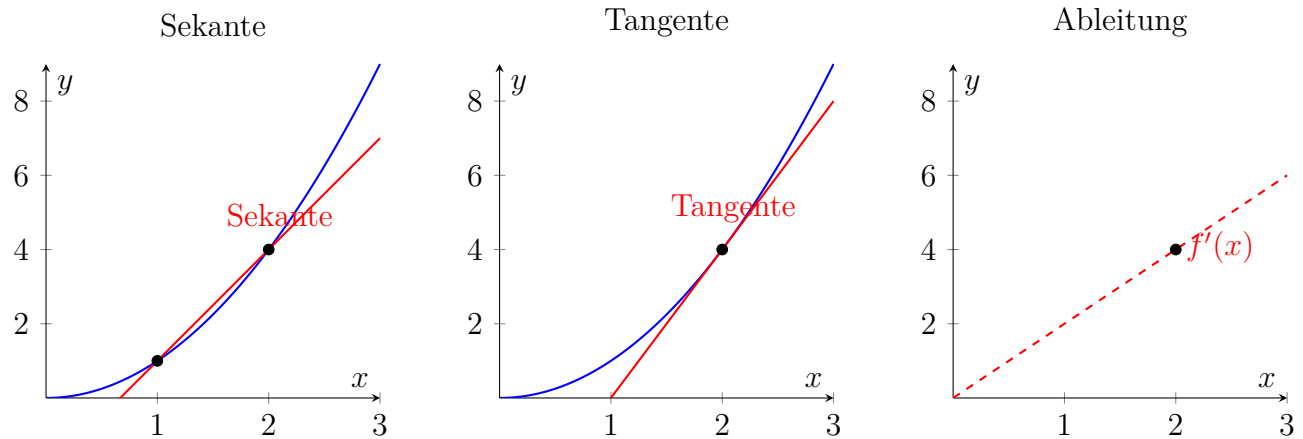


Abbildung 2.1: In der linken Abbildung ist eine Funktion f und die Tangente durch die Punkte bei $x = 1$ und $x = 2$ abgebildet. Die Steigung der Sekante entspricht hierbei $\Delta f(1, 2)$. In der mittleren Abbildung findet sich die gleiche Funktion mit der Tangente bei $x = 2$. Die Steigung der Tangente entspricht $f'(2)$, also dem Funktionswert der Ableitung bei $x = 2$. Sprich, die abgebildete Tangente hat Steigung 4 und es gilt $f'(2) = 4$.

Definition 1.3: Ableitung

Sei f eine beliebige Funktion, bei der für alle x der Differentialquotient definiert ist. Das heißt f differenzierbar und die Funktion

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad (2.3)$$

heißt Ableitung von f .

Die Namen f und x sind natürlich beliebig gewählt. Ist x die Zeit schreibt man auch gerne t und für Orte s , x oder y .

Wenn $s(t)$ jetzt die zurückgelegte Strecke zu einer Zeit t angibt, ist $s'(t)$ die Geschwindigkeit (häufig $v(t)$ genannt) und $s''(t) = v'(t)$ ist die Beschleunigung (häufig $a(t)$ genannt).

2 Rechenregeln für Ableitungen

Theorem 2.1: Ableitung von Monomen

Ein Monom ist eine Funktion der Form

$$f(x) = x^n \quad (2.4)$$

für eine natürliche Zahl n , die man auch den *Grad* des Monoms nennt. Die Ableitung des Monoms ist dann gegeben durch

$$f'(x) = nx^{n-1}. \quad (2.5)$$

Beweis.

Wir fangen an, indem wir uns den Ausdruck $(a+b)^n$ anschauen. Wenn wir diesen Ausdruck ausmultiplizieren, erhalten wir eine lange Summe. Der erste Summand ist hierbei a^n , also aus jedem der n Faktoren nehmen wir das a . Nun kann man für jeden der n Faktoren einmal statt eines a s ein b nehmen, das ergibt $na^{n-1}b$. Alle anderen Summanden haben mindestens eine zweite Potenz in b . Also folgt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + (\dots)b^2 + (\dots)b^3 + \dots + (\dots)b^n \quad (2.6)$$

Zur Vollendung des Beweises setzen wir $a = x$ und $b = h$:

$$\begin{aligned} \frac{dx^n}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + (\dots)h^2 + (\dots)h^3 + \dots + (\dots)h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + (\dots)h^2 + (\dots)h^3 + \dots + (\dots)h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + (\dots)h^2 + (\dots)h^3 + \dots + (\dots)h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + (\dots)h + (\dots)h^2 + \dots + (\dots)h^{n-1} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Im folgenden gucken wir uns an, was mit der Ableitung einer Funktion passiert, wenn sie mit einer Konstanten addiert bzw. multipliziert.

Theorem 2.2: Konstanten beim Ableiten

Sei $f(x)$ eine Funktion mit Ableitung $f'(x)$ und c eine Konstante.

- Sei $g(x) = f(x) + c$, dann gilt $g'(x) = f'(x)$.
- Sei $h(x) = cf(x)$, dann gilt $h'(x) = cf'(x)$.
- Sei $j(x) = f(cx)$, dann gilt $j'(x) = cf'(cx)$.
- Sei $k(x) = c$, dann gilt $k'(x) = 0$.

Beweis.

Übungsaufgabe.

Theorem 2.3: Summenregel

Seien f und g zwei Funktionen mit Ableitungen f' und g' . Dann gilt:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (2.8)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Theorem 2.4: Produkt- und Quotientenregel

Für zwei Funktionen f und g mit den Ableitungen f' und g' gilt:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (2.10)$$

Theorem 2.5: Ableitung von Sinus- Cosinus- und Exponentialfunktion

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad (2.11)$$

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad (2.12)$$

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad (2.13)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\frac{d}{dx} x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i+1)x^{2i}}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Rest: Übungsaufgabe. ■

Definition 2.6: Höhere Ableitungen

Für die Ableitung der Ableitung von f schreibt man oft

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x). \quad (2.14)$$

Wenn man n -mal ableitet schreibt man

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x). \quad (2.15)$$

Beispiel :

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} \exp(ikx) &= \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \exp(ikx) \\ &= \frac{d}{dx} ik \exp(ikx) \\ &= ikik \exp(ikx) \\ &= -k^2 \exp(ikx)\end{aligned}$$

KAPITEL 3

VEKTORRECHNUNG

1 Motivation

Wir erinnern uns an die komplexen Zahlen, zum Beispiel $z = 1 - i$. Diese Zahl hat einen Realteil $x = 1$ und einen Imaginärteil $y = -1$. Man könnte diese Zahl also auch darstellen als

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Andererseits wissen wir auch, dass z in Polarkoordinaten durch einen Pfeil dargestellt werden kann, der von der 0 nach z zeigt. Dieser Pfeil hat eine Länge und eine Richtung. Allgemein kann man also sagen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

stellt einen Pfeil dar, der vom Ursprung aus gesehen auf den Punkt mit den Koordinaten (v_x, v_y) zeigt.

2 Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$

Definition 2.1: Vektor im $\mathbb{R}^3$

Ein Vektor $\vec{v}$ im Raum ist ein Tupel von drei Zahlen x, y und $z \in \mathbb{R}$, das in der folgenden Weise notiert wird:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Anschaulich ist ein Vektor ein Pfeil, der von einem Punkt $p = (a, b, c)$ im Koordinatensystem zu einem Punkt $q = (a + c, b + y, c + z)$ zeigt.

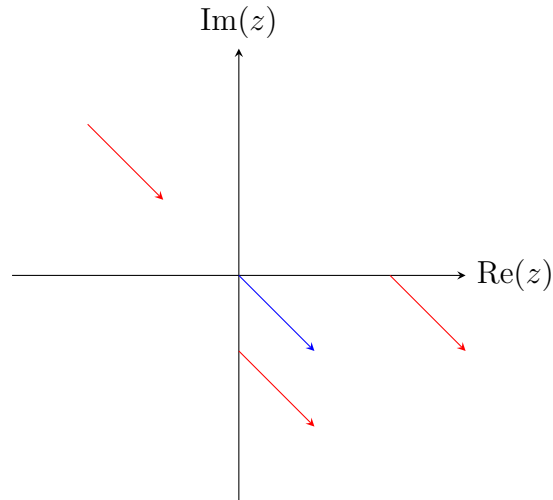


Abbildung 3.1: Der blaue Pfeil verbindet den Ursprung mit dem Punkt mit dem Koordinaten $(1, -1)$, aber der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist unabhängig vom Startpunkt, es geht nur um die Länge und die Richtung des Pfeils.

Definition 2.2: Addition von Vektoren

Gegeben seien zwei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Die Summe der zwei Vektoren ist definiert durch

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Anschaulich ist das die Hintereinanderausführung der beiden Verschiebungen durch die Vektoren v_1 und v_2 (siehe Abbildung 3.2).

Definition 2.3: Skalarmultiplikation

Gegeben sei ein Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

und ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Skalarmultiplikation von $\vec{v}$ mit λ ist definiert durch

$$\lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Der resultierende Vektor ist parallel zu $\vec{v}$, allerdings wird seine Länge mit λ skaliert. Ist $\lambda < 0$, so zeigt λv in die entgegengesetzte Richtung zu λ (siehe Abbildung 3.2).

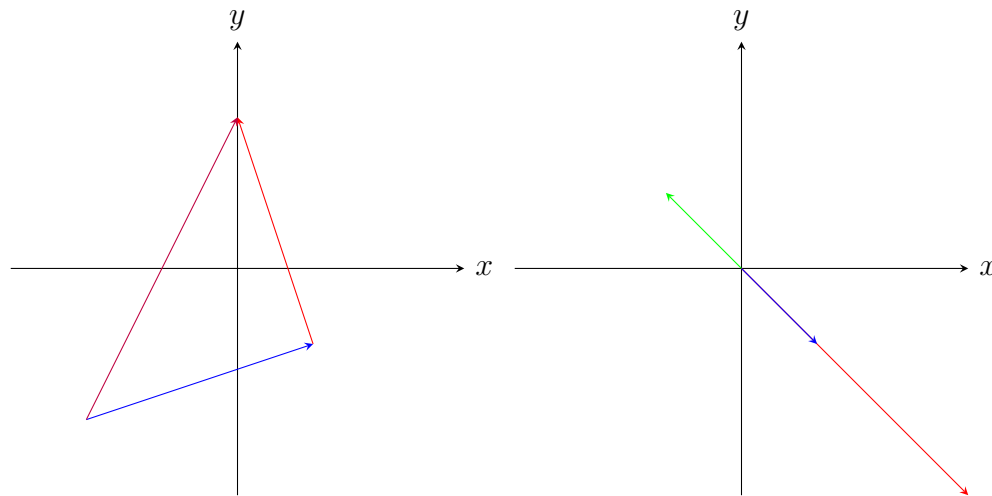


Abbildung 3.2: Links: Der blaue Pfeil stellt den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar, der rote den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Summe der beiden ist der lilane Pfeil $\begin{pmatrix} 3-1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Da Vektoren nur die relativen Verschiebungen (Pfeile) beschreiben, ist der Startpunkt (hier unten links) beliebig.

Rechts: Der blaue Pfeil repräsentiert den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Der rote Pfeil entspricht $3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, während der grüne Pfeil $-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Definition 2.4: Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge an Elementen $\{\vec{v}\}$, die Vektoren genannt werden. Vektoren dürfen addiert und mit einer reellen (oder komplexen) Zahl multipliziert werden. Die hier benutzten Räume $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$ sind Beispiele für Vektorräume, aber auch die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum.

3 Spezielle Vektoroperationen im $\mathbb{R}^3$

Definition 3.1: Betrag eines Vektors

Die Länge eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ kann nach dem Satz des Pythagoras bestimmt werden durch

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (3.7)$$

Beispiel : Länge eines Vektors

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}. \quad (3.8)$$

Definition 3.2: Skalarprodukt

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (3.9)$$

Theorem 3.3: Geometrische Interpretation des Skalarprodukt

Wenn ϕ der Winkel ist, der von den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossen ist, dann gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \phi \quad (3.10)$$

Insbesondere bedeutet $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dass $\vec{a}$ senkrecht zu $\vec{b}$ ist.

Beispiel : Winkel zwischen zwei Vektoren

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir berechnen den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \phi \\ 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 &= \sqrt{2} \sqrt{1} \cos \phi \\ \cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \phi &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Definition 3.4: Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Theorem 3.5: Eigenschaften vom Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt hat folgende Eigenschaften:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das heißt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0.$$

- $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \phi$

Teil II

Quantenmechanik

KAPITEL 1

QUANTISIERUNG: DER PHOTOEFFEKT

Betrachten wir folgenden Aufbau in Abbildung (1.1). An einer Hochspannungsquelle (HQ) wird eine Zinkplatte (Leiterplatte) angeschlossen, sodass diese negativ geladen ist. Gegenüber von der Zinkplatte wird eine Drahtspirale platziert, welche an einen Messverstärker angeschlossen ist. Diese Drahtspirale stellt eine Gegenelektrode dar und ist positiv geladen.

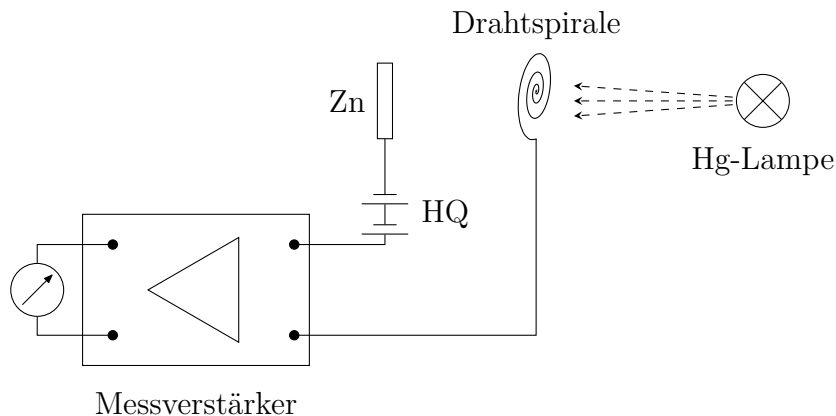


Abbildung 1.1: Aufbau zur Messung des Photoeffekts.

Der Aufbau ermöglicht es, den Fluss von Elektronen (Strom) zu messen, welche durch das elektrische Feld zwischen Zinkplatte und Drahtspirale zur Drahtspirale beschleunigt werden und durch den Messverstärker fließen. Bei normalem Tageslicht beobachten wir keinen Stromfluss. Stellen wir nun eine Quecksilberdampf Lampe hinter die Drahtspirale und schalten diese an, so beobachten wir das Entladen der Leiterplatte durch den fließenden Strom am Messverstärker.

Erkenntnis

Im Gegensatz zu Tageslicht sorgt die Beleuchtung durch eine Quecksilberdampf Lampe für die Entladung der Zinkplatte.

Was macht das Quecksilberdampfampenlicht so besonders?

Setzen wir ultraviolette (kurze Wellenlänge) und infrarote (lange Wellenlänge) Lichtfilter vor die Lampe, so stellen wir fest, dass beim Beleuchten mit Infrarotlicht kein Entladestrom fließt, wobei die Bestrahlung mit Ultraviolettlicht zu einem Entladestrom führt.

Erkenntnis

Es existiert eine obere Grenzwellenlänge des Lichts λ_g . Ist $\lambda > \lambda_g$, so fließt keine Entladestrom durch den Aufbau.

Bemerkung: Versuche mit unterschiedlichen Leiterplatten zeigen, dass λ_g vom Material abhängig ist.

Mithilfe eines Magnetfeldes kann die Ladung der Teilchen die für den Stromfluss sorgen bestimmt werden. Hierbei wird festgestellt, dass es sich bei den geladenen Teilchen die sich von der Zinkplatte lösen um Elektronen handelt. Auch im Vakuum wurden gleiche Beobachtungen gemacht, wodurch der beobachtete Effekt durch die Ionisierung von Luftteilchen zwischen Anode (Zinkplatte) und Kathode (Drahtspirale) ausgeschlossen ist.

Zwischenergebnis

Die Bestrahlung eines Leiters mit Licht löst aus diesem Elektronen aus. Dabei muss die Wellenlänge des Lichts kürzer sein als eine (vom Material des Leiters abhängige) Grenzwellenlänge λ_g .

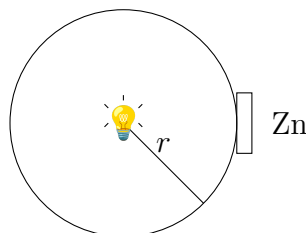
Was passiert wenn wir die Lichtintensität ändern?

Klassisch erwarten wir, dass mit höherer Intensität die Elektronen stärker aus der Zinkplatte „rausgerissen“ werden und entsprechend auch bei größerer Wellenlänge sich die Elektronen irgendwann aus der Platte lösen. Dies ist allerdings nicht der Fall. Beobachtungen zeigen, dass der Photostrom, also der Entladestrom, mit zunehmender Intensität zwar zunimmt, dieser Effekt aber auch nur ab einer Schwelle von $\lambda > \lambda_g$ auftritt. Für $\lambda < \lambda_g$ fließt trotz steigender Intensität kein Photostrom.

Diese Erkenntnis lässt erste Zweifel an der Wellennatur des Lichts entstehen, da sich das Licht hier scheinbar nicht so verhält, wie man es von einer Welle erwarten würde.

[Simulation zum Photoeffekt auf Leifiphysik.de](#).

Ein weiterer Widerspruch zum klassischen Wellenmodell wird ersichtlich wenn wir das Licht in einzelnen Lichtblitzen aussenden. Die kann durch bspw. einer Lochscheibe welche an einem Motor befestigt ist und sich mit einer bestimmten Pulsfrequenz dreht, umgesetzt werden.



Wir nehmen an, dass die Lichtleistung gleichmäßig, von der punktförmigen Lichtquelle weg, im Raum verteilt wird. Eine Quecksilberdampflampe mit einer elektrischen Leistung von $P = 200 \text{ W}$ strahlt 10% dieser Leistung aus. Entsprechend ist $P_{\text{licht}} = 20 \text{ W}$. Auf einer Entfernung von $r = 1 \text{ m}$ beträgt die „Flächen-Lichtleistung“

$$\frac{P_{\text{licht}}}{A} = \frac{P_{\text{licht}}}{4\pi r^2} = \frac{20 \text{ W}}{4\pi (1 \text{ m})^2} \simeq 1.6 \text{ W m}^{-2}, \quad (1.1)$$

wobei $A = 4\pi r^2$ der Oberfläche einer Kugel entspricht. Die Oberfläche eines Atoms mit Radius $r_{\text{atom}} \simeq 10^{-10} \text{ m}$, auch $1 \text{ \AA}$ bzw. Angstrom genannt, beträgt

$$A_{\text{atom}} = 4\pi r_{\text{atom}}^2 \simeq 12 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2. \quad (1.2)$$

Unter der Annahme, dass sich die Flächenleistung gleichmäßig auf der Oberfläche der Zinkplatte verteilt, entspricht die aufgenommene Leistung eines Zinkatoms, wenn 90% des Lichts reflektiert wird,

$$P_{\text{atom}} = 0.1 \frac{P_{\text{licht}}}{A} \cdot A_{\text{atom}} = 0.1 \cdot 1.6 \text{ W m}^{-2} \cdot 12 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2 \simeq 2 \cdot 10^{-20} \text{ W}. \quad (1.3)$$

Hierbei vernachlässigen wir erstmal, dass für den Photoeffekt eigentlich nur der UV-Anteil des Lichts relevant ist. Bei einer Ablösearbeit von $W_a = 4 \text{ eV} \simeq 6.4 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ muss eine Zeit von Δt gewartet werden, bis die erforderliche Energie $P_{\text{atom}} \cdot \Delta t$ gespeichert wurde, um ein Elektron aus der Zinkplatte herauszulösen. Diese Zeit entspricht demnach

$$\Delta t = \frac{W_a}{P_{\text{atom}}} = \frac{6.4 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{2 \cdot 10^{-20} \text{ W}} \simeq 32 \text{ s}. \quad (1.4)$$

Kommen wir zurück zu den Lichtblitzen, die mithilfe der Lochscheibe ausgesandt werden. Wird durch den erzeugten und verstärkten Photostrom ein Lautsprecher erregt, hören wir mit der Pulsfrequenz der Lichtquelle ein „Klick“ und zwar instantan. Wir nehmen keine Zeitverschiebung Δt wahr, welche wir aus der Annahme des klassischen Wellenmodells bestimmt haben.

Erkenntnis

Der Photoeffekt tritt, im Widerspruch zur Wellentheorie, instantan auf. Wir sagen, der Photoeffekt tritt trägheitslos ein.

Die Gegenfeldmethode

Bisher haben wir eine negativ geladene Leiterplatte (Anode) und eine positiv geladene Gegenelektrode (Kathode) betrachtet um in dem dazwischen aufgebauten elektrischen Feld die losgelösten Elektronen zur Kathode zu beschleunigen. Nun drehen wir das ganze um. Die Leiterplatte wird zur Kathode, die Gegenelektrode zur Anode, so dass sich ein Gegenfeld aufbaut. Um nun zur Gegenelektrode, also zur Anode, zu gelangen, müssen die herausgelösten Elektronen aus der Zinkplatte dieses Gegenfeld erst einmal überwinden. Ist die kinetische Energie größer als die des Gegenfelds $E_{\text{kin}} \geq e \cdot U_g$, wobei U_g die Spannung ist die zwischen

Kathode und Anode anliegt, so erreichen die Elektronen die Anode und es fließt ein Strom I . Drehen wir U_g soweit hoch bis $I = 0$ wird, entspricht dies gerade $E_{kin} = e \cdot U$. Die zu beobachtenden Kurve ist in Abbildung (1.2) dargestellt.

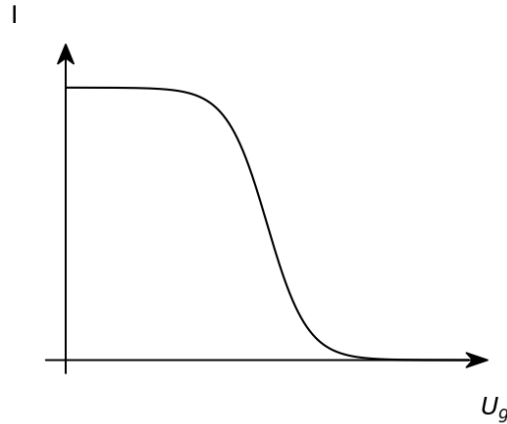


Abbildung 1.2: Verlauf des Photostroms in Abhängigkeit der Gegenspannung

Soweit haben diese Beobachtungen bei konstanter Frequenz und Intensität des Quecksilberdampflampenlichts stattgefunden. Ändern wir die Intensität, so ändert sich nichts. Ändern wir die Frequenz, indem wir einen Farbfilter vor die Lichtquelle stellen, so wird der Strom größer für höhere Frequenzen und kleiner für niedrige Frequenzen. Nehmen wir also drei verschiedene Filter und notieren wir die Gegenspannung U_g bei der der fließende Strom gerade Null wird. Wir erhalten folgende Tabelle, in der wir die Frequenz f des Lichts aus der Wellenlänge ($\lambda = c/f$) und die kinetische Energie aus der Gegenspannung bestimmen.

Filter	Lichtfarbe	Wellenlänge $\lambda[10^{-7} \text{ m}]$	$U_g[\text{V}]$ für $I = 0$	$f[10^{14} \text{ s}^{-1}]$	$E_{kin}[\text{eV}]$
F1	gelb	5.78	0.78	5.19	0.78
F2	grün	5.46	0.88	5.49	0.88
F3	blau	4.36	1.38	6.88	1.38

Tabelle 1.1: Messwerte und Auswertung der Gegenfeldmethode für verschiedene Farbfilter.

In einem $f - E_{kin}$ Diagramm auftragen erhalten wir den Plot in Abbildung (1.3)

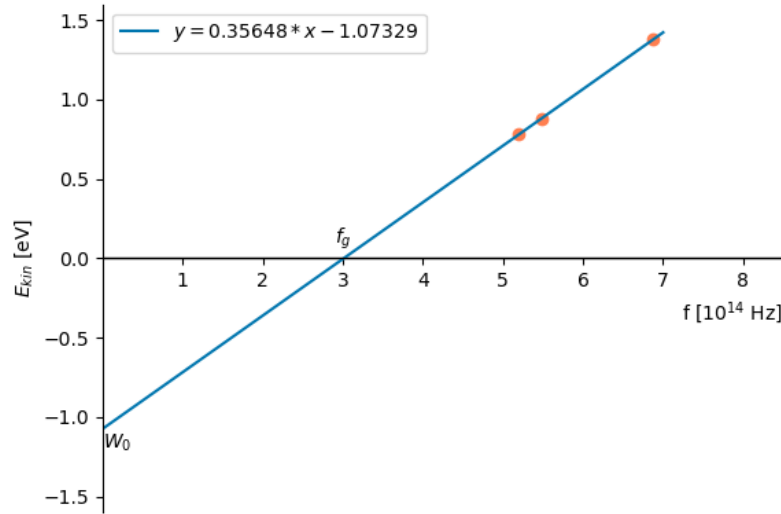


Abbildung 1.3: Gefittete Datenpunkte aus der Tabelle (1.1)

Durch die drei Punkte können wir eine Gerade fitten und erhalten durch Extrapolation einen x- und y-Achsen Abschnitt bei $f = f_g$ und $E_{kin} = -W_0$. f_g stellt dabei die Grenzfrequenz dar ($f_g = c/\lambda_g$) und W_0 die Arbeit die verrichtet wird, um ein Elektron aus dem Zinkatom zu lösen. Die Gleichung lautet

$$E_{kin} = h \cdot f - W_0 \quad (1.5)$$

und der Fit aus Abbildung (1.3) liefert die Werte

$$W_0 = 1.07329 \text{ eV} \quad (1.6)$$

$$h = 0.35648 \cdot 10^{-14} \text{ eV s} = 5.7108096 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (1.7)$$

mit dem Umrechnungsfaktor

$$1 \text{ eV} = 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (1.8)$$

1 eV ist die gewonnene Energie eines Elektron beim durchlauf einer Beschleunigungsspannung von 1 V. Die Steigung

$$h = \frac{W_0}{f_g} = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (1.9)$$

ist eine materialunabhängige Konstante die für beliebige Leiterplatten gleich bleibt. Da die Größen der Einheit [J s] eine „Wirkung“ darstellt, heißt diese Größe **Plancksches Wirkungsquantum**.

Einstein deutet den Photoeffekt so, dass das Licht keine kontinuierliche Energie trägt, sondern diese „gequantelt“ in einer endlichen Anzahl an Energiebündel lokalisiert ist. Diese Lichtquanten, auch Photonen genannt, bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit, sind unteilbar und können nur als Ganze erzeugt oder absorbiert werden. Ein Lichtquant trägt die Energie

$$E_{\text{photon}} = h \cdot f \quad (1.10)$$

wobei f der Frequenz die Lichts angibt. Monochromatisches Licht trägt also Lichtquanten der Energie $h \cdot f$. Des Weiteren bedeutet intensiveres Licht das Auftreten von mehr Lichtquanten pro Zeiteinheit, nicht jedoch energiereicheres Licht.

Im Photoeffekt geben entsprechend die Lichtquanten ihre Energie an Elektronen ab. Reicht diese Energie die materialcharakteristische Ablösearbeit zu verrichten, so löst sich das Elektron und behält überschüssige Energie als kinetische Energie

$$h \cdot f = E_{kin} + W_0. \quad (1.11)$$

Ergebnis

Licht trägt diskrete Energien $h \cdot f$ in Form von Lichtquanten (Photonen) die ihre Energie als ganzes abgeben oder nicht. Entspricht die Energie von Lichtquanten der Ablösearbeit W_0 eines Elektrons im Atom, $h \cdot f = W_0$, so löst sich dieses. Ist die Energie größer, so bleibt der Überschuss als kinetische Energie übrig.

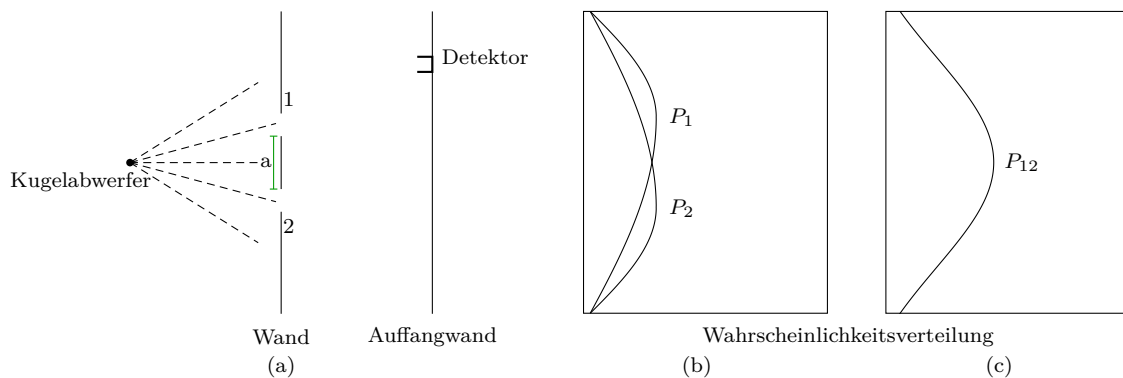
KAPITEL 2

QUANTENVERHALTEN: DOPPELSPALT-EXPERIMENT UND UNSCHÄRFERELATION

Die Quantenmechanik dient der Beschreibung physikalischer Vorgänge auf atomarer Ebene. Solche Vorgänge verhalten sich grundlegend jenseits aller logischen und intuitiven Vorhersagen der klassischen Mechanik. Die Welt wie wir sie mit bloßen Augen wahrnehmen wird von der Quantenmechanik erst mal komplett auf den Kopf gestellt und lässt in erster Instanz am eigenen Wissen zweifeln. Manche Dinge sind nun mal bei genauerer Beobachtung nicht so wie sie zu sein scheinen. Wir beginnen mit einem wichtigen Experiment welches wir zuerst in klassischer Vorgehensweise betrachten: Das Doppelspaltexperiment.

1 Ein Experiment mit Kugeln

Betrachten wir folgendes Experiment. Wir nehmen einen Kugelabwerfer, stellen diesen vor eine Wand mit zwei Spalten, welche nah beieinander liegen, und eine Auffangwand hinter der Wand mit den Löchern.



Wir wollen die Wahrscheinlichkeit messen, mit der eine Kugel welche durch einen Spalt fliegt, auf dem Schirm landet. Wir sprechen von Wahrscheinlichkeiten, da wir nicht vorhersagen können welchen weg die Kugel einschlägt. Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich aus

der Anzahl auftreffender Kugeln an einem Ort, geteilt durch die Gesamtanzahl an Kugeln welche auf der Auffangwand ankommen. Die resultierende Wahrscheinlichkeitsverteilung ist in (c) graphisch dargestellt. Wir stellen uns die Fragen: Warum sieht die Verteilung genau so aus? Warum liegt der Maximalwert bei $x=0$?

Um dem nachzugehen schauen wir uns die Wahrscheinlichkeitsverteilung durch jedes Loch einzeln an. Dies können wir tun, indem wir ein Loch zuhalten bzw. die Bälle durch dieses Loch nicht in unsere Statistik aufnehmen. Das Resultat sind die Kurven aus (b), wobei P_1 die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Auftreffens aus Loch 1 und P_2 die Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Durchgang durch Loch 2 ist. Die Wahrscheinlichkeit des Auftreffens ist dabei am größten auf der geraden Linie zwischen Loch und Auffangwand. vergleichen wir die Wahrscheinlichkeiten aus (b) und (c), so sehen wir, das

$$P_1 + P_2 = P_{12} \quad (2.1)$$

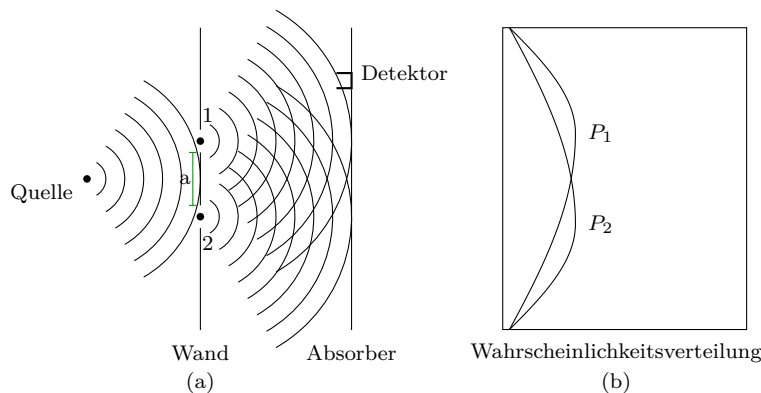
gilt. Zusätzlich beobachten wir auch nie Halbe oder Bruchteile von Kugeln die Auftreffen.

Erkenntnis

Kugeln im Doppelspalt kommen immer als ganzes auf der Auffangwand an und ihre Wahrscheinlichkeit ist additiv.

2 Ein Experiment mit Wellen

Ersetzen wir nun den Ballabwerfer durch eine Wellenquelle und die Auffangwand durch einen Absorber, s.d. die Wellen nicht reflektiert werden können (z.b. einen Sandstrand).



Die Wellenquelle erzeugt Kugelwellen die sich gemäß

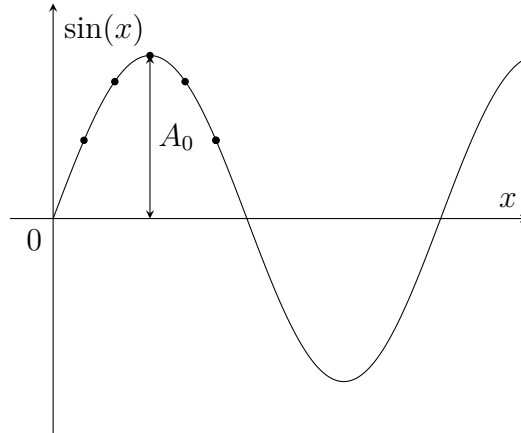
$$\psi(x) = \frac{A_0}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (2.2)$$

ausbreiten. Wir erinnern uns, dass sich die Intensität einer Welle gleichmäßig im Raum verteilt:

$$I = \frac{P}{A} \quad (2.3)$$

wobei P die Leistung der Welle ist und $A = 4\pi r^2$ die Oberfläche einer Kugel mit Radius r . Im Mittel ist die Leistung, also Energie E pro Zeit t , einer Welle durch das Quadrat der Amplitude gegeben

$$P = \frac{E}{t} = \frac{1}{2}kA_0^2. \quad (2.4)$$

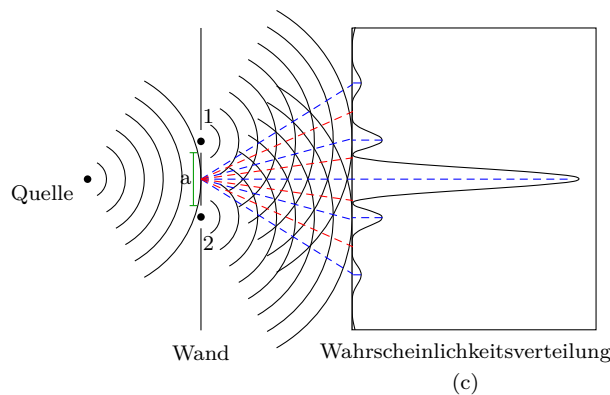


Damit ist einerseits $I \sim \frac{1}{r^2}$ aber auch $I \sim A_0^2$. Insgesamt ist also

$$A_0 \sim \sqrt{I} \sim \frac{1}{r} \quad (2.5)$$

wodurch die Kugelwelle so aussieht wie in Gl.2.2.

Am Detektor messen wir die Intensität (Wahrscheinlichkeitsverteilung), also die Energierate. Die erste Beobachtung die wir machen ist, dass die Intensität am Detektor jeden beliebigen Wert annehmen kann, abhängig von der Bewegung der Quelle. Entsprechend besteht hier keine „Klumpigkeit“ im Verhalten der Wellenintensität wie wir es bei den Kugeln beobachtet haben. Nun messen wir die Intensität für verschiedene x -Werte und erhalten folgendes Muster:



Wie kommt dieses Muster zustande?

Beobachten wir die Wellen die die Spalte an der Wand erreichen, sehen wir, dass diese an den Löchern gebeugt werden und sich neue Kreisförmige Wellen von jedem Loch ausbreiten.

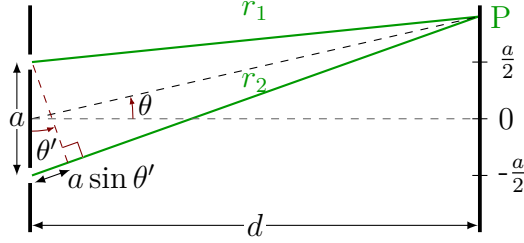
$$\psi_1 = \frac{A_0}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} \quad (2.6)$$

$$\psi_2 = \frac{A_0}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} \quad (2.7)$$

Wir wollen die Intensität

$$I_{12} \propto |\psi_1 + \psi_2|^2 \quad (2.8)$$

bestimmen.



Das Betragsquadrat der Summe der Wellen ist

$$|\psi_1 + \psi_2|^2 = \left| \frac{A_0}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t)} + \frac{A_0}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t)} \right|^2 \quad (2.9)$$

$$= |A_0|^2 \left| \left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right) e^{-i\omega t} \right|^2 \quad (2.10)$$

$$= |A_0|^2 e^{-i\omega t} e^{i\omega t} \left(\frac{e^{ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{ikr_2}}{r_2} \right) \left(\frac{e^{-ikr_1}}{r_1} + \frac{e^{-ikr_2}}{r_2} \right) \quad (2.11)$$

$$= |A_0|^2 \left(\frac{e^{ikr_1} e^{-ikr_1}}{r_1^2} + \frac{e^{ikr_1} e^{-ikr_2}}{r_1 r_2} + \frac{e^{ikr_2} e^{-ikr_1}}{r_2 r_1} + \frac{e^{ikr_2} e^{-ikr_2}}{r_2^2} \right) \quad (2.12)$$

$$= |A_0|^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{e^{ik(r_1 - r_2)}}{r_1 r_2} \right) \quad (2.13)$$

$$= |A_0|^2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2 \cos(ik(r_1 - r_2))}{r_1 r_2} \right) \quad (2.14)$$

$$(2.15)$$

wobei

$$r_1 = \sqrt{d^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{r_1^2} \simeq \frac{1}{d^2 + x^2} \quad (2.16)$$

$$r_2 = \sqrt{d^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{r_2^2} \simeq \frac{1}{d^2 + x^2} \quad (2.17)$$

für $a \ll x, d$. Mit

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + d^2}} \quad \& \quad \sin \theta' = \frac{r_2 - r_1}{d} \quad (2.18)$$

und $\theta \approx \theta'$ folgt

$$r_2 - r_1 = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + d^2}} \quad (2.19)$$

und damit

$$\cos(k(r_1 - r_2)) = \cos\left(\frac{kax}{\sqrt{x^2 + d^2}}\right) \quad (2.20)$$

und

$$\frac{1}{r_1 r_2} \simeq \frac{1}{(\sqrt{x^2 + d^2})^2} = \frac{1}{d^2 + x^2}. \quad (2.21)$$

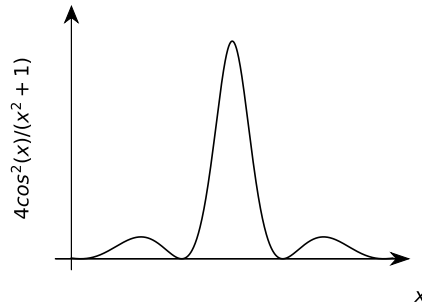
Insgesamt ist die Intensität

$$I_{12} \propto |A_0|^2 \left(\frac{1}{d^2 + x^2} + \frac{1}{d^2 + x^2} + \frac{2 \cos \left(\frac{kax}{\sqrt{d^2 + x^2}} \right)}{d^2 + x^2} \right) \quad (2.22)$$

$$= |A_0|^2 \left(\frac{2}{d^2 + x^2} + \frac{2}{d^2 + x^2} \cos \left(\frac{kax}{\sqrt{d^2 + x^2}} \right) \right) \quad (2.23)$$

$$= \frac{2|A_0|^2}{d^2 + x^2} \underbrace{\left(1 + \cos \left(\frac{kax}{\sqrt{d^2 + x^2}} \right) \right)}_{2 \cos^2 \left(\frac{kax}{2\sqrt{d^2 + x^2}} \right)} \quad (2.24)$$

$$= 4|A_0|^2 \frac{\cos^2 \left(\frac{kax}{2\sqrt{d^2 + x^2}} \right)}{d^2 + x^2}. \quad (2.25)$$



Wir sehen, dass „Interferenz“ zwischen Wellen stattfindet. Betrachten wir die Wellen durch jedes Loch einzeln indem wir ein Loch abdecken, so erhalten wir wieder das Muster aus (b). Die einzelnen Intensitäten sind

$$I_1 \propto |\psi_1|^2 = \frac{|A_0|^2}{r_1^2} \simeq \frac{|A_0|^2}{d^2 + x^2} \quad (2.26)$$

$$I_2 \propto |\psi_2|^2 = \frac{|A_0|^2}{r_2^2} \simeq \frac{|A_0|^2}{d^2 + x^2} \quad (2.27)$$

$$(2.28)$$

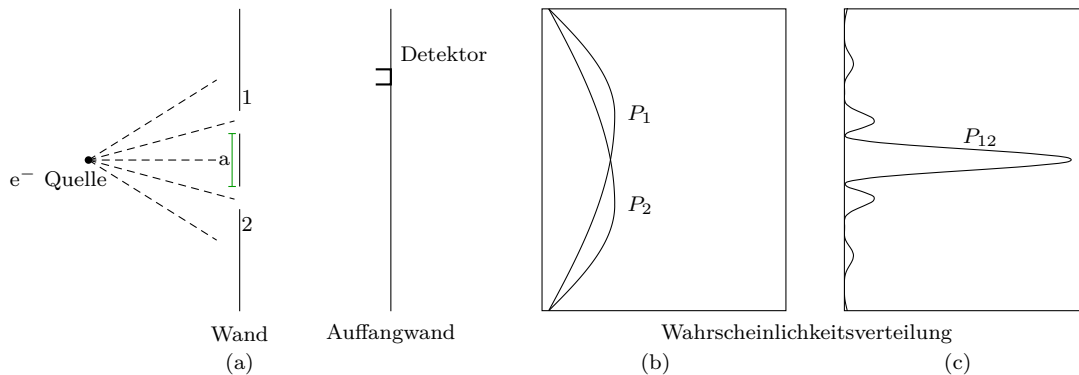
entsprechend finden wir das

$$I_{12} = I_1 + I_2 + \underbrace{2\sqrt{I_1 I_2} \cos \left(\frac{kax}{\sqrt{d^2 + x^2}} \right)}_{\text{Interferenzterm}} \quad (2.29)$$

Erkenntnis

Wellen am Doppelspalt können jeden Wert annehmen und zeigen *Interferenz*.

3 Ein Experiment mit Elektronen



Wir ersetzen nun die Wellenquelle durch einen Elektronenabwerfer. Dieser besteht aus einem Wolframdraht, welcher erhitzt wird, und ein Metallgehäuse mit einem Loch. Ist der Draht gegenüber dem Metallgehäuse negativ geladen, so werden die aus dem Draht freigesetzten Elektronen zu den Wänden des Metallgehäuses beschleunigt und einige treten aus dem Loch aus. Alle Elektronen aus dem Loch werden ungefähr die selbe Energie haben. An der Auffangwand befindet sich ein Detektor der bspw. ein Elektronenvervielfacher ist welcher an einem Lautsprecher angeschlossen ist. Jedes Mal wenn etwas am Detektor ankommt hören wir ein *Klick*. Alle *Klicks* die wir hören sind gleich. Wir hören keine *halbklicks*. Die *Klicks* sind zwar sehr ungleichmäßig:

Klick... Klick-Klick... Klick... Klick... Klick ... Klick-Klick...

zählen wir aber die *Klicks* innerhalb eines bestimmten Zeitintervalls, von bspw. einer Minute, so ist diese Anzahl ziemlich genau gleich. Wir können also von einer durchschnittlichen „*Klick-rate*“ sprechen. Bewegen wir den Detektor, so ändert sich die Rate, aber die Lautstärke (Größe) der *Klicks* bleibt immer gleich. Auch bei Veränderung der Drahttemperatur wird die rate schneller oder langsamer, aber die *Klicks* sind immer gleich. Stellen wir nun zwei Detektoren auf, so nehmen wir Zeitgleich immer nur ein *Klick* aus einem der beiden Detektoren war. Wir schließen also daraus, dass was an der Auffangwand ankommt in gleich großen „Klumpen“ ankommt und immer nur einer auf einmal.

Jetzt schauen wir uns die Rate über die gesamte Auffangwand an, also die relative Wahrscheinlichkeit, dass ein „Elektronklumpen“ an einem Ort x an der Auffangwand ankommt. Das Ergebnis ist das Interferenzmuster in (c), das aus dem Experiment mit den Wellen!

Aber wie kann das sein? Aus den *Klicks* die wir wahrnehmen würden wir schließen, dass sich die Elektronen, welche in „Klumpen“, gleicher Größe einzeln auf der Auffangwand auftreffen, sich wie im Experiment mit Kugeln verhalten. Schließen wir jeweils ein Loch und messen

dann die Rate über die Gesamte Auffangwand, so erhalten wir tatsächlich die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_1 und P_2 aus (b). Entsprechend gilt für Elektronen

$$P_{12} \neq P_1 + P_2. \quad (2.30)$$

Am Doppelspalt nehmen wir also Interferenz von Elektronen war.

Soweit sind wir von einfachen Wegen der Elektronen durch ein Loch und direkt zur Auffangwand ausgegangen. Nehmen wir kurz an es ist nicht so. Vielleicht laufen manche Elektronen durch Loch 1, kehren um und gehen durch Loch 2 und laufen ein paarmal durch die Löcher hin und her bevor sie zur Auffangwand gelangen. Wenn wir Loch 2 geschlossen haben können somit einige Elektronen aus Loch 1 nicht zur Auffangwand gelangen. Dies steht allerdings im Widerspruch zur Auffangrate aus (b) und (c), da (b) an einigen Stellen mehr Elektronen aufweist als in (c), so dass das schließen eines Loches die Anzahl an Elektronen erhöhen würde. Auch ist am Ort $x = 0$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P_{12} > P_1 + P_2$.

Erkenntnis

Elektronen kommen in „Klumpen“, also wie Kugeln, an der Auffangwand an und die Ankunfts-wahrscheinlichkeit ist die einer Welle.

Folgerung

Manchmal verhalten sich Elektronen wie Kugeln und manchmal wie Wellen.

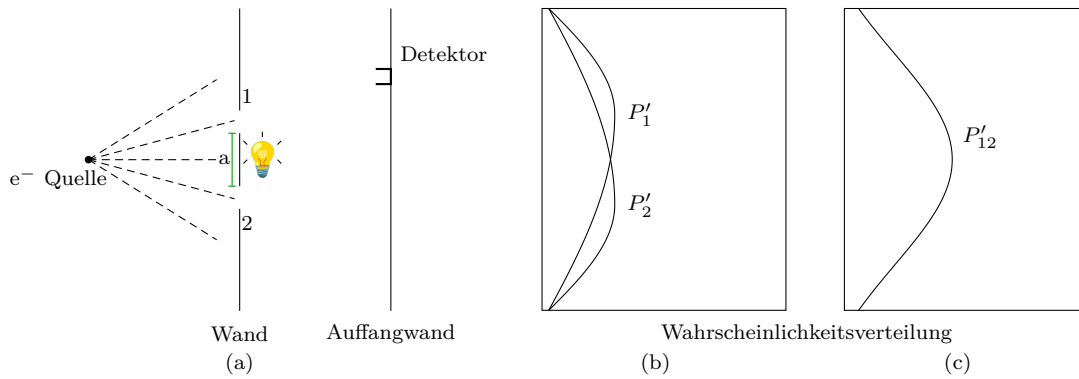
3.1 Genauere Beobachtung der Elektronen

Wie kann das sein, dass wir anhand der *Klicks* ein Kugel- bzw. Teilchenverhalten wahrnehmen, die Ankunfts-wahrscheinlichkeit jedoch der einer Welle entspricht? Was passiert hier genau am Spalt?

Wir wollen es genauer wissen und stellen zur Überprüfung eine Lichtquelle zwischen den beiden Löchern in der Wand auf. Wenn Elektronen vorbeifliegen, streuen sie das Licht und wir sehen welchem Weg das Elektron gefolgt ist. Wir werden feststellen, dass wir mit jedem *Klick* ein Lichtblitz sehen. Entweder bei Loch 1 oder bei Loch 2. Niemals gleichzeitig!

Vor der Auffangwand beobachten wir also ein klassisches Teilchenverhalten. Warum ist dann $P_1 + P_2 \neq P_{12}$?

Wir schauen uns also nochmal die Ankunfts-wahrscheinlichkeit am Detektor an während wir die Elektronen mithilfe der Lichtquelle genau beobachten. Mit jedem *Klick*, könne wir das Ereignis „am Ort x auf der Auffangwand angekommene Elektron“ einem Spalt zuordnen durch welches es geflogen kommt. Die Ankunfts-wahrscheinlichkeit aus Spalt 1 bezeichnen wir mit P'_1 und aus Spalt 2 mit P'_2 . Wiederholen wir die Messung für viele x -Werte, erhalten wir die folgenden Verteilungen.



Das Ergebnis ist nicht sehr überraschen, denn wir finden beim genauen hinschauen ein Teilchenverhalten mit den Wahrscheinlichkeitsverteilungen P'_1 und P'_2 welche P_1 und P_2 sehr ähneln. Wie sieht denn nun die Gesamtwahrscheinlichkeit aus? Da wir die Wahrscheinlichkeiten P'_1 und P'_2 durch die Zuordnung jedes an der Auffangwand auftreffende Elektron erhalten haben, ist

$$P'_{12} = P'_1 + P'_2, \quad (2.31)$$

also genau wie P_{12} für Kugeln.

Erkenntnis

Die Verteilung der Elektronen ist anders wenn wir sie beobachten als wenn wir sie nicht beobachten.

Das Ergebnis könnte natürlich auch an unserer Lichtquelle liegen. Vielleicht ändert das Licht den Pfad eines Elektrons, indem es eine Kraft ausübt und das Elektron in eine andere Richtung lenkt. Drehen wir also die Helligkeit des Lichts runter, um die Elektronen nicht so sehr zu stören. Wir beobachten erst mal, dass die Lichtblitze, die von den Elektronen gestreut werden, schwächer sind als vorher. Die Blitze sind aber immer gleich groß. Was aber nun passiert ist, dass wir manchmal ein *Klick* hören ohne einen Blitz zu sehen. Was wir hier beobachten, ist die „Klumpigekeit“ des Lichts wie bei Elektronen. Es kommt als „Klumpen“ an, welches wir Photon nennen, und wird gestreut. Wenn wir die Intensität der Lichtquelle runter drehen, verändern wir nicht die „Größe“ sondern die Rate der Photonen. Bei einer schwachen Rate kann es nun mal vorkommen, dass gerade kein Photon da ist welches an dem Elektron gestreut werden kann und es fliegt einfach ungesehen weiter. Ein gesehenes Elektron ist also **immer** gestört. Schauen wir uns hier nochmal die Wahrscheinlichkeitsverteilung an. Jene Elektronen die durch Spalt 1 fliegen, jene die durch Spalt 2 fliegen, und der Rest der nicht vor der Auffangwand registriert wird. Wir werden beobachten, dass die Elektronen durch Spalt 1 eine Verteilung wie P'_1 haben, die durch Spalt 2 eine Verteilung wie P'_2 und die die wir gar nicht gesehen haben folgen einer Verteilung wie P_{12} !

Folgerung

Wenn wir die Elektronen nicht sehen, erhalten wir Interferenz!

Gibt es denn irgendeine Möglichkeit die Elektronen zu sehen, ohne sie zu stören? Drehen wir die Intensität des Lichts runter, so stören weniger Photonen die Elektronen, aber die Störung ist immer gleich „groß“. Im Photoeffekt haben wir gesehen, dass das Licht gequantelt ist, Die Energie eines Photons nimmt einen bestimmte Wert, abhängig von der Wellenlänge des Lichts, an

$$E = h \cdot f = \frac{h}{\lambda}. \quad (2.32)$$

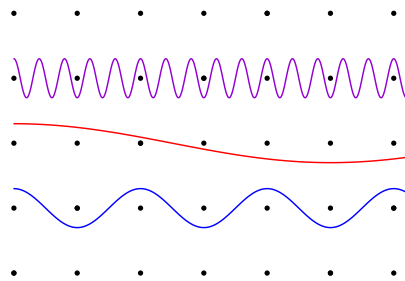
Entsprechend ist der Impuls

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{c\lambda}. \quad (2.33)$$

Wir messen in der Quantenmechanik in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit, setzten also $c = 1$, und haben damit

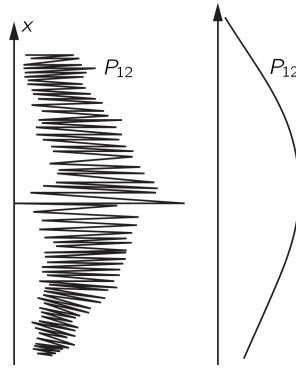
$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (2.34)$$

Diese Beziehung nennt sich die De-Broglie Wellenlänge. Diese Wellenlänge ordnet jedem Teilchen mit dem Impuls p eine Wellenlänge λ zu. Wenn eine Störung eines Elektrons durch den Stoß mit einem Photon geschieht, dann können wir die Störung verringern, indem wir den Impuls p der Photonen verringern. Wir tauschen also die Quelle durch eine langwellige Lichtquelle aus. Wir merken, dass sich die Verteilung P'_{12} langsam der Verteilung P_{12} annähert. Allerdings sehen wir aufgrund der großen Wellenlänge nur noch einen großen verschwommenen Blitz anhand dem wir nicht genau sagen können ob das Elektron aus Spalt 1 oder Spalt 2 gekommen ist. Aufgrund der Wellennatur, gibt es eine Grenze dafür wie nah zwei Punkte sein können um noch unterscheidbar zu sein.



Jetzt haben wir aber auch wirklich alles versucht und es bleibt dabei, dass wir nur ein Interferenzmuster sehen, wenn die Elektronen auf ihrem Weg nicht genau beobachtet werden.

Heisenberg schlug als allgemeines Prinzip das „Unbestimmtheitsprinzip“ vor um diese Phänomen zu erklären. Unsere Naturgesetze sind nur solange gültig wie unsere Apparatur mit der wir messen eine gewisse *Unschärfe* aufweist. Entweder messen wir die Interferenz von Elektronen, ohne deren genauen Weg zu kennen, oder wir kennen deren Ort der Elektronen, erhalten aber keine Interferenz. Das Unbestimmtheitsprinzip hat bis jetzt niemand umgehen können, entsprechend müssen wir davon ausgehen, dass es eine grundsätzliche Eigenschaft



der Natur ist.

Gehen wir noch einmal zum Anfang zurück und schauen uns das Experiment mit den Kugeln an. Wenn alle Materie eine Wellenlänge zugeordnet werden kann und ein Wellenverhalten aufweist, warum sehen wir dann keine Interferenz bei den Kugeln?

Tatsächlich liegt auch Interferenz bei den Kugeln vor. Allerdings ist die Wellenlänge so klein, dass die Interferenzlinien sehr fein und die Maxima und Minima so nah beieinander liegen, dass diese kaum unterscheidbar sind. Jeder Detektor kann diese Feinheiten nicht wahrnehmen und das Ergebnis ist eine ausgeglättete Kurve.

4 Grundprinzip der Quantenmechanik

Ein sehr wichtiger und ausschlaggebender Unterschied zwischen der Klassischen- und der Quantenmechanik ist, dass wir in der Quantenmechanik immer von Wahrscheinlichkeiten sprechen. Wir müssen unsere Tendenz über Ereignisse Vorhersagen zu wollen was unter vorgegebenen Umständen passiert, so wie wir es aus der klassischen Mechanik gewohnt sind, aufgeben. Wir können immer nur die Chance Voraussagen, dass unter bestimmten Anfangsbedingungen etwas passiert.

Zusammenfassung:

Haben wir folgende Gegebenheiten

$$\psi = \text{Wahrscheinlichkeitsamplitude eines Ereignisses (Wellenfunktion)} \quad (2.35)$$

$$P = |\psi|^2 = \text{Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses} \quad (2.36)$$

so gelten folgende Aussagen:

1. Wenn ein Ereignis auf mehreren Weisen auftreten kann (Interferenz), gilt:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (2.37)$$

$$P = |\psi_1 + \psi_2|^2 \quad (2.38)$$

2. Wenn ein Ereignis auf genau einer (beobachteten) Weise passiert, gilt:

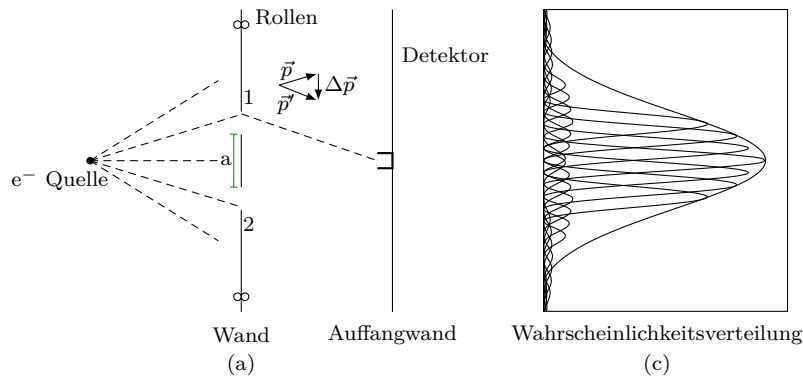
$$P = P_1 + P_2 \quad (2.39)$$

5 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Die Heisenbergsche Unschärferelation lautet:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h \quad (2.40)$$

wobei h dem Planckschen Wirkungsquantum entspricht. In Worten beschrieben besagt es, dass ein Objekt, dessen x-Komponente des Impulses mit einer Genauigkeit Δp bestimmt werden kann, nicht genauer als $\Delta x = \frac{h}{\Delta p}$ lokalisiert werden kann. Wir führen dazu folgendes Experiment durch:



Wir stellen die Wand mit den Spalten durch Rollen gestützt auf, so dass diese sich frei auf und ab bewegen kann. Den Detektor platzieren wir bei $x = 0$. Trifft ein Elektron auf Spalt 1, wird es durch den Stoß an der Wand nach unten gelenkt. Die Differenz des Impulses vor und nach dem Stoß des Elektron Δp zeigt in vertikale Richtung. Aufgrund des Stoßes wird die Wand nach oben bewegt. Wir können also anhand der Bewegung der Wand Δp bestimmen und registrieren, durch welchen Spalt das Elektron geflogen ist, ohne dieses zu stören. Beim Durchgang durch Spalt 2 bewegt sich die Wand nach Unten. Aufgrund der Unschärferelation kann der Ort der Wand nicht mit beliebiger Genauigkeit angegeben werden. Entsprechend können wir aber auch nicht sagen, wo genau sich die zwei Spalte befinden. Der Mittelpunkt unseres Interferenzbildes ändert sich somit mit jedem Elektron welches an der Wand anstößt. Die Verschiebung Δx im Interferenzmuster wird gerade so groß sein, dass sich die Maxima und Minima überlagern und wir am Ende ein verschmiertes Bild sehen in dem wir keine Interferenz beobachten können.

Das Unbestimmtheitsprinzip schützt in diesem Sinne die Quantenmechanik. Diese Relation zwischen Ort und Impuls hat selbst für größere Objekte bestand und bis jetzt ist es noch nie jemandem gelungen, Ort und Impuls eines Objektes mit größerer Genauigkeit zu messen.

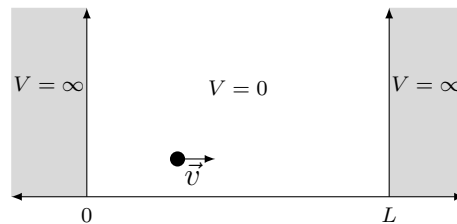
KAPITEL 3

TEILCHEN IN DER BOX: DIE SCHRÖDINGERGLEICHUNG

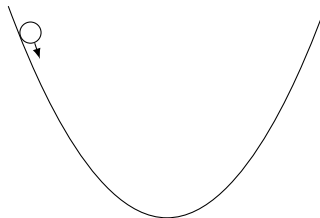
Stellen wir uns ein Teilchen in einer unendlich hohen Box der Breite L vor. Das Teilchen kann sich innerhalb der Box bewegen. Die Bewegung kommt durch die Energie des Teilchens zustande, welche die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (3.1)$$

ist und durch die Box, ein sogenannter Potentialkasten, ein Spezialfall eines Potentialtopfes, welcher die Bewegung beschränkt.



Ein Potential beschreibt die Wirkung eines Feldes, z.B. das elektrische Feld einer Ladung oder dem Gravitationsfeld der Erde, auf ein Objekt, z.B. einer Ladung oder einer Masse. Wir können ein Potential als einen äußeren Einfluss verstehen, der die Bewegung in gewisser Weise beeinflusst. Ein vereinfachtes Beispiel wäre eine Murmel in einer Schüssel oder ein*e Skater*in die/der eine Halfpipe entlang skated.



Der Weg und die Reichweite der Murmel sind durch die kinetische Energie (Geschwindigkeit) und der Schüssel gegeben.

Kommen wir zurück zu unserem Teilchen in der Box, welches wir als eindimensionales Modell betrachten. Die Box ist ein Kastenpotential, welches das Potential $V = 0$ im Inneren besitzt und $V = \infty$ außerhalb der Box.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ \infty & x \leq 0, x \geq L. \end{cases} \quad (3.2)$$

Im Inneren wirkt aufgrund des fehlenden Potentials keine Kraft auf das Teilchen,

$$F \sim \frac{dV}{dx} = 0, \quad (3.3)$$

wodurch das Teilchen ohne Energieverlust und mit konstanter Geschwindigkeit in der Box bewegen kann. Da das Potential außen unendlich groß ist, kann das Teilchen die Box nicht verlassen und prallt an den Wänden einfach ab. Das Teilchen besitzt einen Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{bzw.} \quad p = mv. \quad (3.4)$$

Wir können mit dieser Beziehung die kinetische Energie aus Gl.(3.1) durch den Impuls ausdrücken, indem wir $v = p/m$ einsetzen:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{p}{m}\right)^2 = \frac{p^2}{2m}. \quad (3.5)$$

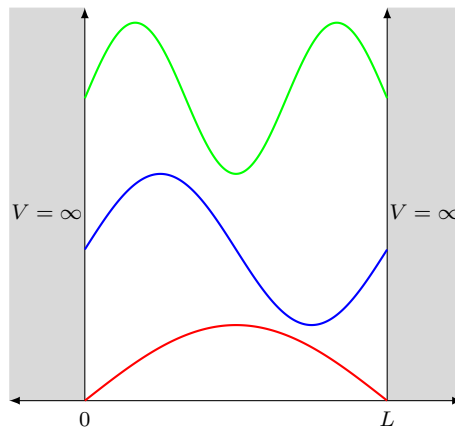
Aus dem Doppelspaltexperiment wissen wir auch, dass sich das Teilchen als Welle darstellen lässt und eine De-Broglie Wellenlänge besitzt

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (3.6)$$

Setzen wir diese Gleichung in die Kinetische Energie aus Gl.(3.5) ein, so erhalten wir

$$E = \frac{(h/\lambda)^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2}. \quad (3.7)$$

Die Energie hängt also von der Wellenlänge ab. Schauen wir uns eine ebene Welle in der Box an. Durch das unendlich große Potential außerhalb der Box, also den unendlich hohen Wänden, passen nur solche Wellen in die Box, die ein ganzzahliges Vielfaches ihrer halben Wellenlänge groß sind. Anschaulich lässt sich das durch ein Seil darstellen welches wir an den Wänden der Box befestigt haben. Regen wir das Seil an das es eine Welle schlägt, werden wir feststellen, dass aufgrund der befestigten Enden, was als Randbedingung bezeichnet wird, nur solche Wellen entstehen können, die an beiden Enden auf selber Höhe liegen.



Wir folgern also, dass gelten muss

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

Eingesetzt in die Energiegleichung (3.7) ergibt das

$$E_n = \frac{h^2}{4mL^2} \cdot n^2 \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.9)$$

Teilchen in einer Box mit unendlich hohen Wänden haben also nur bestimmte, von n abhängige, diskrete Energien. Dies ist ein sehr vereinfachtes Modell welches zum Verständnis und der Berechenbarkeit der Energieniveaus von Elektronen im Atom verwendet wird. Das Potential eines Atoms sieht zwar anders aus, besitzt aber auch diskrete Energieniveaus. Wir sagen die Energiezustände im Atom sind quantisiert und den Übergang eines Elektrons von einem Energieniveau zum anderen wird Quantensprung genannt.

Wir haben die Wellennatur von Teilchen verwendet, um die Energieniveaus im Kastenpotential zu bestimmen. Die Energien sind dabei durch die kinetische Energie und dem Potential in dem sich das Teilchen befindet, gegeben. Entsprechend haben wir einen Mechanismus der aus Wellenfunktion, der kinetischen Energie und dem Potential, die diskreten Energieniveaus liefert, die das Teilchen einnehmen kann.

$$\psi, E_{kin}, V \longrightarrow \boxed{\text{Mechanismus}} \longrightarrow E_n$$

Anders gesagt nehmen wir eine ebene Welle (Teilchen)

$$\psi(x) = Ae^{i(kx - \omega t)} \quad (3.10)$$

und wenden darauf die kinetische Energie und das Potential an, so erhalten wir die von diesem Teilchen erlaubten diskreten Energien

$$(E_{kin} + V) \cdot \psi = E_n \cdot \psi. \quad (3.11)$$

Diese Gleichung heißt Schrödinger-Gleichung und gilt für beliebige Teilchen der Masse m in einem beliebigen Potential V . Da die kinetische Energie eine Eigenschaft des Teilchens ist und das Teilchen durch die Wellenfunktion $\psi(x)$ beschrieben wird, ergibt sich die Frage, ob der kinetische Anteil der Schrödinger-Gleichung durch die Wellenfunktion beschrieben werden kann. Schauen wir uns die kinetische Energie aus Gl.(3.7) etwas genauer an. Wir wissen, dass die Wellenlänge λ einer Welle von der Wellenzahl k abhängt

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}. \quad (3.12)$$

Eingesetzt in Gl.(3.7) wird die Energie zu

$$E = \frac{h^2 k^2}{(2\pi)^2 2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3.13)$$

wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ das sogenannte reduzierte Plancksche Wirkungsquantum ist. Aus der Mathevorlesung wissen wir, dass

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} = -k^2 e^{ikx} \quad (3.14)$$

gilt. Entsprechend ist

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{d^2}{dx^2} A e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.15)$$

$$= -k^2 \cdot A e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.16)$$

$$= -k^2 \psi(x). \quad (3.17)$$

Wir erhalten also die kinetische Energie, indem wir die Wellenfunktion zwei Mal nach dem Ort x ableiten und mit den konstanten $-\hbar^2/(2m)$ multiplizieren

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi(x). \quad (3.18)$$

Bemerkung: die sogenannte Dispersionsrelation gibt den Zusammenhang zwischen Wellenzahl k und Impuls p

$$p = \hbar k \quad (3.19)$$

und zwischen den Energie und der (Kreis-)Frequenz ω

$$E = \hbar \omega \quad (3.20)$$

Da wir in der Quantenmechanik in Einheiten von $\hbar$ rechnen, wird $\hbar = 1$ gesetzt und entsprechend können wir eine ebene Welle, welche ein Teilchen beschreibt auch als

$$\psi = A e^{i(px - Et)} \quad (3.21)$$

schreiben, wobei wir den Zusammenhang

$$p \leftrightarrow k \quad (3.22)$$

$$E \leftrightarrow \omega \quad (3.23)$$

verwendet haben.

Unser Mechanismus zur Bestimmung von Energieniveaus wird also durch die Schrödingergleichung

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \psi = E_n \psi \quad (3.24)$$

bzw.

$$\left(-\frac{p^2}{2m} + V \right) \psi = E_n \psi \quad (3.25)$$

beschrieben.

KAPITEL 4

AHARANOV-BOHM EFFEKT

Stellen wir uns vor, eine elektrische Ladung e der Masse m bewegt sich mit dem Impuls p entlang einer Geraden - zum Beispiel ein Elektron in einem Draht - im ansonsten leeren Raum. Wie wir schon wissen, ist die Wellenfunktion so einer Ladung gegeben durch

$$\psi = A \cdot e^{i(px-Et)} \quad (4.1)$$

und erfüllt die Schrödingergleichung

$$\left(\frac{p^2}{2m} + V \right) \psi = E\psi \quad (4.2)$$

sodass

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad (4.3)$$

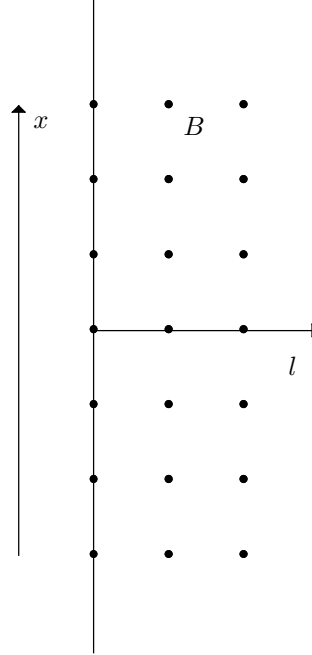
. Schalten wir nun ein konstantes Magnetfeld B ein, das normal auf die Richtung steht, in die sich das Elektron bewegt. Wie wir wissen, wird nun eine Kraft auf die Ladung ausgeübt, nämlich die Lorentzkraft

$$F = e \cdot v \cdot B \quad (4.4)$$

die normal sowohl zur Richtung des Magnetfeldes als auch des Drahtes zeigt. Mit der Beziehung $p = m \cdot v$ können wir diese Kraft auch mit dem Impuls ausdrücken, nämlich

$$F = \frac{e}{m} \cdot p \cdot B \quad (4.5)$$

Bewegen wir nun den Draht ein Stück l zur Seite - entlang der Richtung, in die die Lorentzkraft zeigt.



Da dies eine Bewegung in die Richtung ist, in der die Lorentzkraft zeigt, verrichten wir Arbeit, nämlich

$$W = F \cdot l = \frac{e}{m} \cdot p \cdot B \cdot l \quad (4.6)$$

die eine zusätzliche Energie in unserem System darstellt. Entsprechend ist nun die Energie

$$E_{neu} = E + W = \frac{p^2}{2m} + V + \frac{e}{m} \cdot p \cdot B \cdot l \quad (4.7)$$

oder

$$E_{neu} = \frac{1}{2m} (p + e \cdot B \cdot l)^2 + V - \frac{(e \cdot B \cdot l)^2}{2m} \quad (4.8)$$

Interessanterweise können wir dies wieder in der ursprünglichen Form als

$$E_{neu} = \frac{p_{neu}^2}{2m} + V_{neu} \quad (4.9)$$

schreiben, wobei

$$p_{neu} = p + e \cdot B \cdot l \quad V_{neu} = V - \frac{(e \cdot B \cdot l)^2}{2m} \quad (4.10)$$

Die Schrödingergleichung ist nun wieder erfüllt, diesmal allerdings mit der Wellenfunktion

$$\psi_{neu} = A \cdot e^{i(p_{neu}x - E_{neu}t)} \quad (4.11)$$

Betrachten wir nun die alte und neue Wellenfunktion zum Zeitpunkt $t = 0$. Wenn wir den Ausdruck für $p_{neu} = p + e \cdot B \cdot l$ einsetzen, so sehen wir, dass

$$\begin{aligned}\psi_{neu}(t=0) &= A \cdot e^{ip_{neu}x} \\ &= A \cdot e^{ipx + i \cdot e \cdot B \cdot l \cdot x} \\ &= \psi(t=0) \cdot e^{i \cdot e \cdot B \cdot l \cdot x}\end{aligned}\tag{4.12}$$

Es gibt also einen Phasenunterschied von $\Delta\varphi = e \cdot B \cdot l \cdot x$, wenn das Elektron den neuen Weg durch den verschobenen Draht zurücklegt anstatt den ursprünglichen. Interessant ist, dass $l \cdot x$ nichts anderes ist als die Fläche, die zwischen neuem und alten Weg liegt, und in der das Magnetfeld B herrscht, das normal zu dieser Fläche steht. Der Gesamte Ausdruck $B \cdot l \cdot x$ ist also das Magnetfeld, multipliziert mit der Fläche, durch die es durchtritt. Diese Größe nennt man magnetsichen Fluss, das Symbol ist Φ_M . Insgesamt finden wir also, dass es einen zusätzlichen Phasenunterschied

$$\Delta\varphi = e \cdot \Phi_M\tag{4.13}$$

zwischen zwei Pfaden gibt, wenn ein magnetischer Fluss Φ_M die Fläche zwischen diesen Pfaden durchfließt. Diese Beziehung gilt ganz allgemein und ist als Aharonov-Bohm Effekt bekannt. Interessanterweise gilt sie sogar dann, wenn das Magnetfeld nur die Fläche zwischen den Pfaden durchquert, die Pfade selbst, und damit die Elektronen, nie kreuzt.

Teil III

Supraleitung

KAPITEL 1

EINLEITUNG - HISTORISCHER ÜBERBLICK

1908: Verflüssigung von ^4He

Heike Kamerlingh Onnes von der Uni Leiden verflüssigt ^4He . Der Siedepunkt von ^4He bei Normaldruck liegt bei 4,2 K. Damit wird erstmals die Untersuchung der elektrischen Leitfähigkeit und anderer Eigenschaften von Metallen bei besonders tiefen Temperaturen möglich. Das damalige Verständnis des elektrischen Widerstands war im Rahmen des sogenannten Drude-Modells noch sehr rudimentär.

Exkurs: Drude-Modell

Das Drude-Modell betrachtet elektrische Leiter als Gitter aus positiv geladenen Atomrümpfen (Ionen), in dem sich die Elektronen als Elektronengas frei bewegen können. Wird ein äußeres elektrisches Feld $\vec{E}$ angelegt, werden die frei beweglichen Elektronen zunächst durch eine Kraft $\vec{F}_{el} = q \cdot \vec{E}$ beschleunigt. Während ihrer Bewegung durch das Ionengitter stoßen die negativ geladenen Elektronen mit den positiv geladenen Atomrümpfen zusammen. Dieser Prozess kann durch die mittlere Stoßzeit τ quantifiziert werden, die angibt, wie lange ein Elektron im Mittel beschleunigen kann, bevor es mit einem Ion zusammenstößt. Aus dieser mittleren Stoßzeit lässt sich die mittlere Geschwindigkeit v_D der Elektronen, auch Driftgeschwindigkeit genannt, herleiten. Beide Größen sind abhängig von der elek-

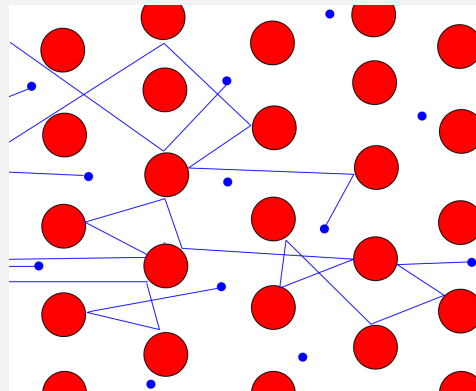


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der Bewegung von Elektronen (blau) in einem Kristallgitter (rot) nach der Drude-Theorie. Bild entnommen und bearbeitet aus [5].

trischen Feldstärke E .

$$v_D = -\frac{e\tau}{m}E$$

e : Elementarladung

m : Elektronenmasse

Mit dem Ohmschen Gesetz in der lokalen Betrachtungsweise

$$E = \varrho j$$

ϱ : spezifischer Widerstand

j : Stromdichte

und der Stromdichte

$$j = nev_D$$

n : Ladungsträgerdichte

lässt sich die Leitfähigkeit σ eines Materials ausrechnen zu

$$\sigma = \frac{1}{\varrho} = \frac{e^2 \tau n}{m}$$

Hierbei ist die Ladungsträgerdichte n , also die Anzahl der Ladungsträger pro Volumen, eine materialspezifische Größe, während e und m Naturkonstanten sind. Die mittlere Stoßzeit τ und damit auch die Leitfähigkeit σ sind temperaturabhängig - mit steigender Temperatur *sinkt* die Stoßzeit und damit auch die Leitfähigkeit, d.h. der Widerstand wird größer!

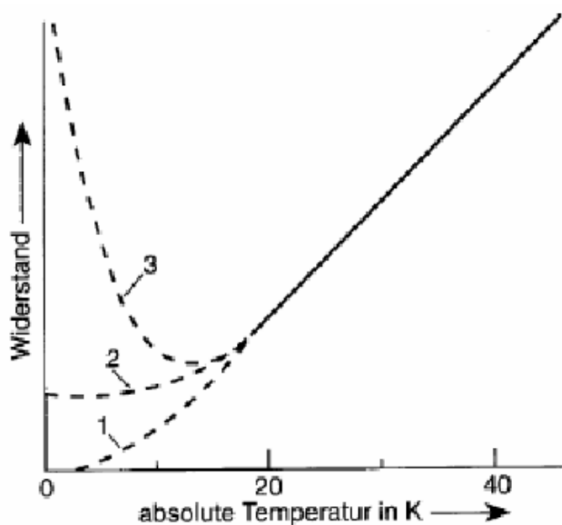


Abbildung 1.2: Drei mögliche Szenarien, wie sich der Widerstand ϱ bei tiefen Temperaturen verhalten könnte: 1) ϱ läuft stetig gegen 0. 2) ϱ läuft gegen einen festen, endlichen Grenzwert. 3) R erreicht bei $T > 0$ ein Minimum und steigt anschließend wieder an. [7]

Man konnte sich nun drei Szenarien vorstellen, wie sich der spezifische Widerstand ϱ zu tieferen Temperaturen hin verhalten könnte (siehe Abbildung 1.2):

- 1) Der Widerstand geht stetig gegen 0 $\varrho = 0|_{T=0}$
- 2) Der Widerstand geht gegen einen festen Grenzwert $\varrho > 0|_{T=0}$.
- 3) Der Widerstand erreicht bei einer Temperatur $T > 0$ ein Minimum und steigt anschließend wieder an.

1911: Entdeckung der Supraleitung

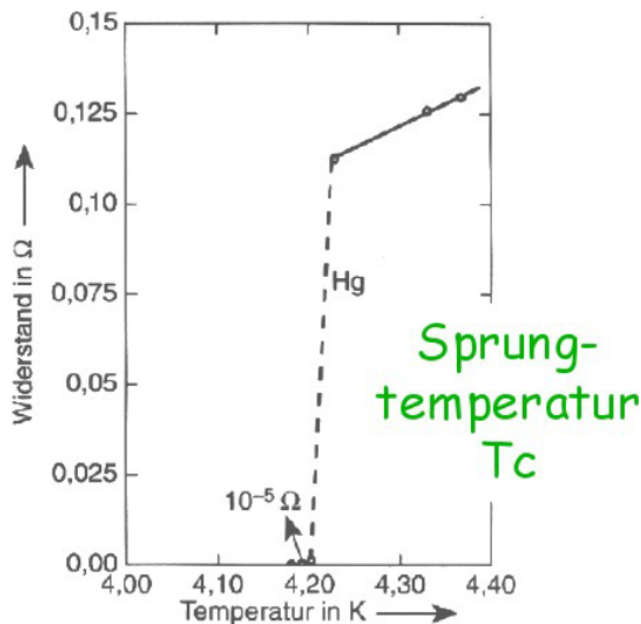


Abbildung 1.3: Die historische Messung zur Entdeckung der Supraleitung von Hg. Der Widerstand fällt bei $T_c = 4,2$ K sprunghaft auf $R \approx 0$. [7]

Nun konnte der Widerstand von Quecksilber (Hg), dem damals reinsten Metall, bei tiefen Temperaturen gemessen werden. Es wurde entdeckt, dass bei 4,2 K der Widerstand schlagartig auf $R \approx 0$ abfällt (siehe Abbildung 1.3).

1913: Nobelpreis

1933: Meißner-Ochsenfeld-Effekt

Walther Meißner und Robert Ochsenfeld entdecken den idealen Diamagnetismus von Supraleitern, den sogenannten „Meißner-Ochsenfeld-Effekt“ (siehe Abbildung 1.4). Dieser wichtige Effekt, bei dem das Magnetfeld vollständig aus dem Inneren eines Supraleiters verdrängt wird, ist der Beleg dafür, dass die Supraleitung durch einen thermodynamischen Zustand hervorgerufen wird.

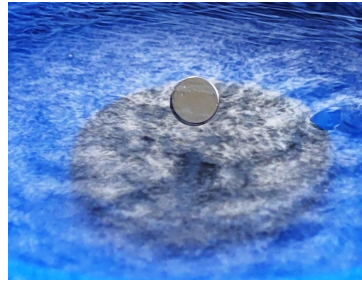
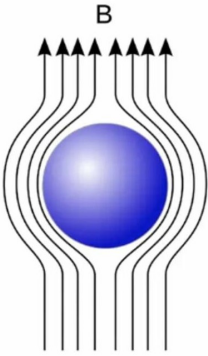


Abbildung 1.4: Links: Schematische Darstellung des Meißner-Ochsenfeld-Effekts aus [4]. Das Magnetfeld B wird vollständig aus dem Inneren des Supraleiters verdrängt. Mitte und rechts: Der Effekt führt dazu, dass ein Magnet, bzw. ein Ring, der auf einer magnetischen Bodenplatte über einem Supraleiter schwebt. [13]

1935: Londonsche Gleichungen

Fritz London und Heinz London stellen die „Londonschen Gleichungen“ auf, welche einen Teil der Phänomenologie der Supraleitung beschreiben.

1950: Ginzburg-Landau-Theorie

Vitaly Ginzburg und Lev Landau formulieren die „Ginzburg-Landau-Theorie“ zur phänomenologischen Beschreibung der Supraleitung. 1962 erhielt Landau den Nobelpreis für die theoretische Beschreibung von supraflüssigem Helium. 2003 erhielt Ginzburg schließlich den Nobelpreis für die Ginzburg-Landau-Theorie. Landau war zu dem Zeitpunkt bereits verstorben.

1957: Abrikosov-Theorie

Alexey Abrikosov beschreibt in der „Abrikosov-Theorie“ die Supraleiter 2. Art und erhält hierfür zusammen mit Ginzburg 2003 den Nobelpreis. In Abbildung 1.5 ist ein Schema und eine Messung eines Supraleiters 2. Art im Magnetfeld abgebildet.

1957: BCS-Theorie

John Bardeen, Leon N. Cooper und John R. Schrieffer veröffentlichen eine Mikroskopische Theorie der Supraleitung, „BCS-Theorie“, die 1972 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wird.

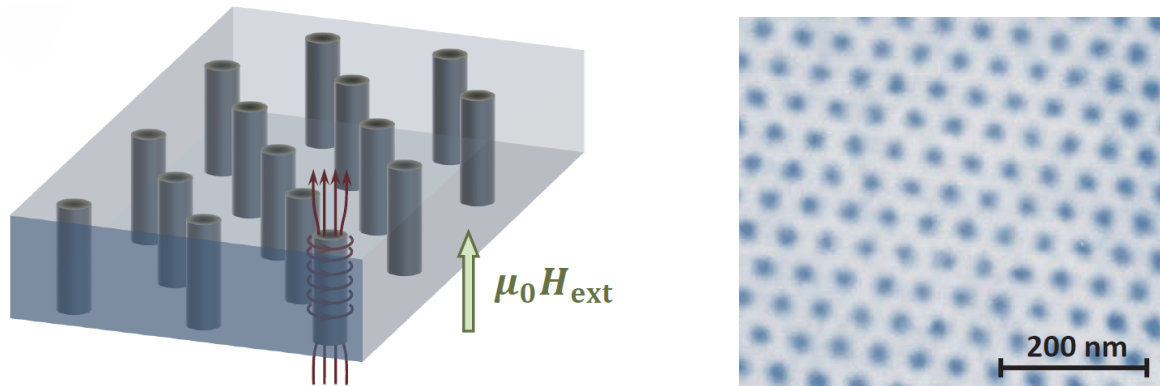


Abbildung 1.5: Links: Schematische Darstellung des Flussliniengitters in einem Supraleiter 2. Art. Rechts: Abrikosov-Dreiecksgitter aus Flussschläuchen mit einem Rastertunnelmikroskop gemessen. [9]

1962: Josephson-Effekte

Brian Johnson sagt die Existenz von Quanteninterferenzeffekten vorher und erhält 1973 den Nobelpreis für die sog. „Josephson-Effekte“. Für ein Beispiel von allgemeinen Interferenzeffekten, siehe Abbildung 1.6 zum Doppelspalteffekt.

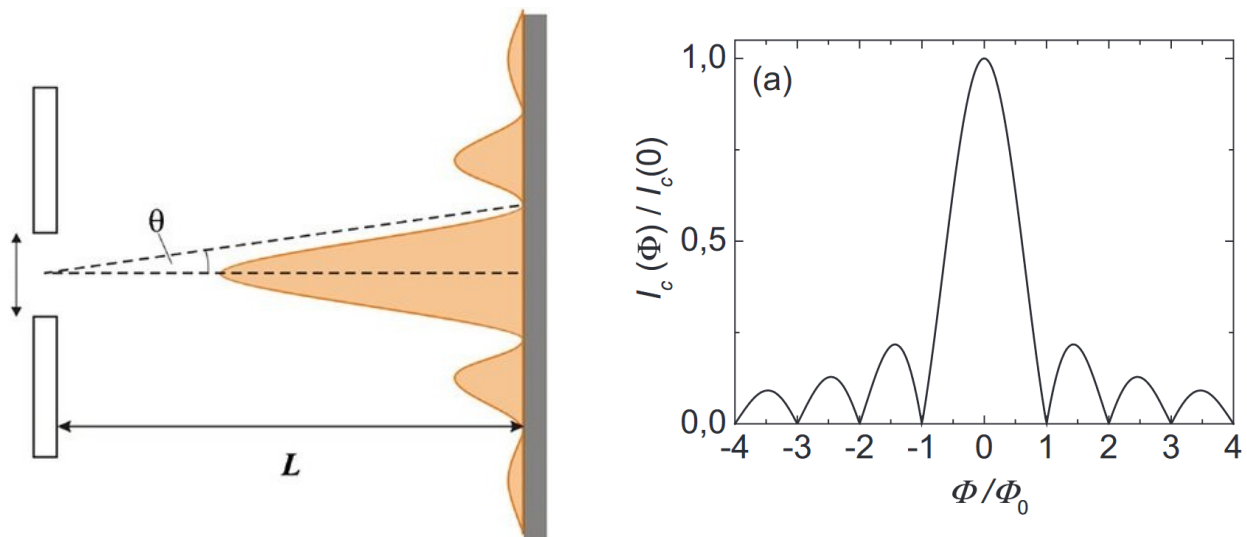


Abbildung 1.6: Links: Interferenzmuster eines Einfachspalts. [6]. Rechts: Interferenz des Suprastroms an einem Josephson-Kontakt. [7]

1966: SQUID

John Clarke entwickelt das SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) für die präzise Messung extrem kleiner Magnetfeldänderungen.

1986: Entdeckung der Hochtemperatur-Supraleitung

Johannes Bednorz und Karl A. Müller messen die bis dahin höchste Sprungtemperatur $T_c \approx 30$ K in einem nicht-metallischen Kupferoxid-basiertem Supraleiter und erhalten hierfür bereits 1987 den Nobelpreis.

1987: Supraleiter mit $T_c > 90$ K

Erstmals wird bei einem Material, einem Kuprat-Supraleiter, eine Sprungtemperatur von über 90 K gemessen. Für die Kühlung auf Temperaturen höher 77 K kann flüssiger Stickstoff eingesetzt werden, anstatt das teurere und nur begrenzt verfügbare flüssige Helium.

2008: Eisenbasierte Hochtemperatur-Supraleiter

Hideo Hosono und Kollegen entdecken die Fe-basierten Supraleiter, eine neue Materialklasse von Hochtemperatur-Supraleitern, die Sprungtemperaturen bis über 100 K erreichen.

Historische Entwicklung von T_c

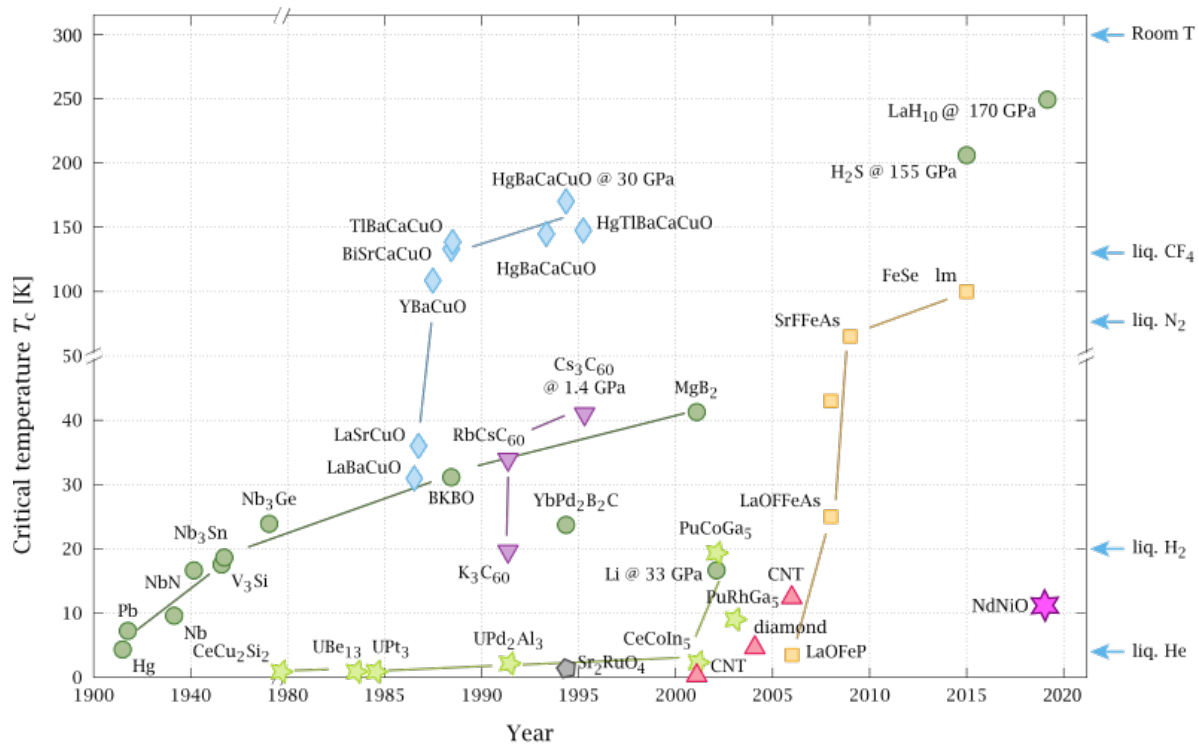


Abbildung 1.7: Zeitstrahl der Entwicklung von Sprungtemperaturen bei verschiedenen Supraleitern. Die verschiedenen Farben repräsentieren unterschiedliche Materialklassen. [10]

KAPITEL 2

KUPRAT-SUPRALEITER

1 Materialien

Bekannte Kuprat-Supraleiter sind

$\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$	„LSCO“	$T_c \approx 38 \text{ K}$
$\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+\delta}$	„YBCO“	$T_c \approx 93 \text{ K}$
$\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$	„BSCCO“	$T_c \approx 92 \text{ K}$

und viele weitere.

Bekannteste Materialien:

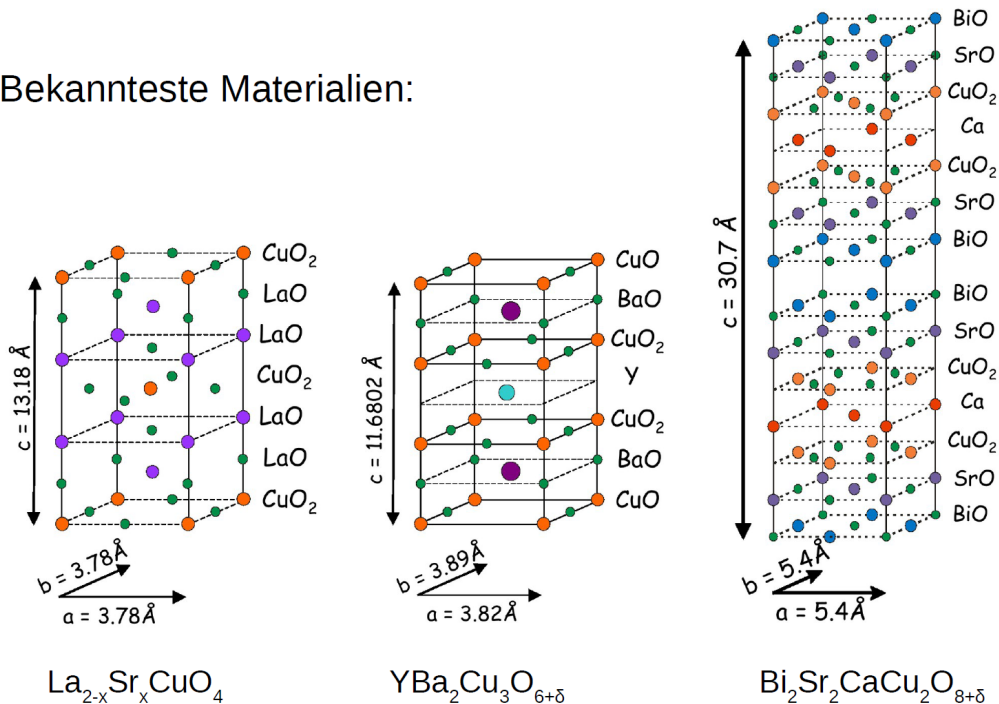


Abbildung 2.1: Kristallstrukturen der bekanntesten Kuprate. Allen gemeinsam sind die CuO_2 -Ebenen, wobei Cu-Atome in orange und O-Atome in grün dargestellt sind. [3]

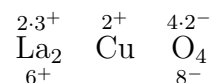
Die Gemeinsamkeit aller dieser Verbindungen sind CuO_2 -Ebenen in der Kristallstruktur (sie-

he Abbildung 2.1. Außerdem sind die Ebenen mittels zusätzlichem Sauerstoff mit „Löchern“ also fehlenden Elektronen, oder durch Substitution von Ionen mit zusätzlichen Elektronen dotiert. Abhängig von der jeweiligen Konzentration kann der Lochgehalt eingestellt werden, was Auswirkungen auf die supraleitenden Eigenschaften des Materials hat.

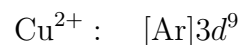
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1 Wasserstoff H																	2 Helium He
3 Lithium Li	4 Beryllium Be	Ordnungszahl Schwarz = nicht radioaktiv Gelb = radioaktiv Symbol Schwarz = Feststoff Rot = Gas Blau = Flüssigkeit										5 Bor B	6 Kohlenstoff C	7 Stickstoff N	8 Sauerstoff O	9 Fluor F	10 Neon Ne
11 Natrium Na	12 Magnesium Mg											13 Aluminium Al	14 Silizium Si	15 Phosphor P	16 Schwefel S	17 Chlor Cl	18 Argon Ar
19 Kalium K	20 Calcium Ca	21 Scandium Sc	22 Titan Ti	23 Vanadium V	24 Chrom Cr	25 Mangan Mn	26 Eisen Fe	27 Cobalt Co	28 Nickel Ni	29 Kupfer Cu	30 Zink Zn	31 Gallium Ga	32 Germanium Ge	33 Arsen As	34 Selen Se	35 Brom Br	36 Krypton Kr
37 Rubidium Rb	38 Strontium Sr	39 Yttrium Y	40 Zirkon Zr	41 Niob Nb	42 Molybdän Mo	43 Technetium Tc	44 Ruthenium Ru	45 Rhodium Rh	46 Palladium Pd	47 Silber Ag	48 Cadmium Cd	49 Indium In	50 Zinn Sn	51 Antimon Sb	52 Tellur Te	53 Jod I	54 Xenon Xe
55 Cäsium Cs	56 Barium Ba	57-71 siehe unten	72 Hafnium Hf	73 Tantal Ta	74 Wolfram W	75 Rhenium Re	76 Osmium Os	77 Iridium Ir	78 Platin Pt	79 Gold Au	80 Quecksilber Hg	81 Thallium Tl	82 Blei Pb	83 Bismut Bi	84 Polonium Po	85 Astat At	86 Radon Rn
87 Francium Fr	88 Radium Ra	89-103 siehe unten	104 Rutherfordium Rf	105 Dubnium Db	106 Seaborgium Sg	107 Bohrium Bh	108 Hassium Hs	109 Meitnerium Mt	110 Darmstadtium Ds	111 Roentgenium Rg	112 Copernicium Cn	113 Nh	114 Fl	115 Mc	116 Lv	117 Ts	118 Og
57-71 Lanthanoide		57 Lanthan La	58 Cer Ce	59 Praseodym Pr	60 Neodym Nd	61 Promethium Pm	62 Samarium Sm	63 Europium Eu	64 Gadolinium Gd	65 Terbium Tb	66 Dysprosium Dy	67 Holmium Ho	68 Erbium Er	69 Thulium Tm	70 Ytterbium Yb	71 Lutetium Lu	
89-103 Actinoide		89 Actinium Ac	90 Thorium Th	91 Protactinium Pa	92 Uran U	93 Neptunium Np	94 Plutonium Pu	95 Americium Am	96 Curium Cm	97 Berkelium Bk	98 Californium Cf	99 Einsteinium Es	100 Fermium Fm	101 Mendelevium Md	102 Nobelium No	103 Lawrencium Lr	

Abbildung 2.2: Das Periodensystem der Elemente mit Ordnungszahlen und Elementsymbolen. Die für Kuprate relevanten Elemente sind violett markiert: Sauerstoff (^8O), Calcium (^{20}Ca), Kupfer (^{29}Cu), Strontium (^{38}Sr), Yttrium (^{39}Y), Barium (^{56}Ba), Bismut (^{83}Bi). Hieraus lassen sich die formalen Valenzwerte bestimmen. [11]

Betrachte zum Beispiel die formalen Valenzwerte der einzelnen Bestandteile von La_2CuO_4 :

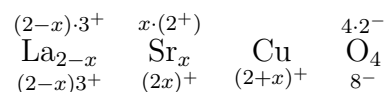


Außerdem ist die Elektronenkonfiguration von Cu^{2+} relevant:



Nicht vollständig besetzte d-Orbitale, in diesem Fall das $3d$ -Orbital, sind mit magnetischen Eigenschaften assoziiert, die hier eine Rolle bei der Entstehung der Supraleitung spielen könnten.

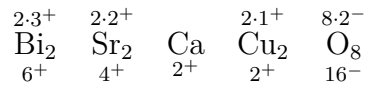
Wie sieht es mit den Valenzen des dotierten Materials $\text{La}_{2-x}\text{Sr}_x\text{CuO}_4$ aus?



Folglich liegt eine Lochdotierung vor.

Nun schauen wir uns $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6+\delta}$ genauer an. Achtung, die Struktur des Materials enthält sowohl CuO_2 -Ebenen und CuO -Ketten. Bei $\delta = 1$ sind die CuO -Ketten vollständig und intakt. Für $\delta < 1$ wird O aus den Ketten entfernt. Im Falle von $\delta = 0$ ist der Sauerstoff aus den Ketten schließlich vollständig verschwunden. Sie bestehen nun ausschließlich aus Cu^{1+} , also Kupfer mit vollem d-Orbital, während die Ebenen Cu^{2+} enthalten.

Schließlich betrachten wir noch $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ für 3-wertiges Bismut.



Hier wird mit zusätzlichem O dotiert, welches sich auf Zwischengitterplätzen anordnet und zwei zusätzliche Elektronen aufnimmt.

KAPITEL 3

PHÄNOMENOLOGIE DER SUPRALEITUNG

1 Verschwinden des elektrischen Widerstands

Experimenteller Befund: Hg und alle danach entdeckten Supraleiter zeigen eine Widerstandsabnahme um viele Größenordnungen zu $\varrho \approx 0$.

Frage: Gilt auch tatsächlich $\varrho \equiv 0$?

Experiment: Finde eine obere Grenze für den Widerstand! Am genauesten lässt sich dies über ein Dauerstromexperiment im supraleitenden Ring gestalten. Hierfür nutzt man die elektromagnetische Induktion, beschrieben durch die **Lenz'sche Regel**.

Exkurs: Lenzsche Regel

Die Lenzsche Regel beschreibt die Richtung des Stromes, der durch elektromagnetische Induktion hervorgerufen wird. Elektromagnetische Induktion bewirkt eine Spannung in einem Leiter, wenn sich der magnetischen Flusses durch die Fläche dieses Leiters ändert. Die Lenzsche Regel kann man nun folgendermaßen formulieren:

Der Induktionsstrom ist stets so gerichtet, dass er der Ursache seiner Entstehung entgegenwirkt.

Das heißt, das Magnetfeld, welches der Induktionsstrom erzeugt, ist dem Magnetfeld, welches den Strom induziert hat, entgegengerichtet. Dies ist eine Folge der Energieerhaltung.

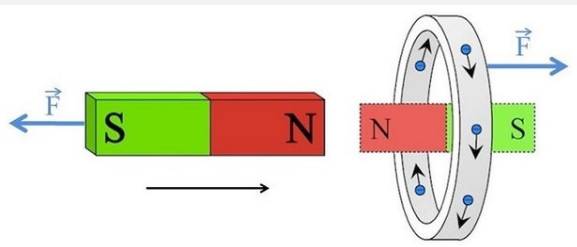


Abbildung 3.1: Beispiel zur elektromagnetischen Induktion und Lenzschen Regel anhand eines Magneten, der auf einen Leiterrings zubewegt wird. [12]

Betrachten wir dies am Beispiel eines Leiterring, auf welchen sich ein Magnet zubewegt (siehe Abbildung 3.1. Dabei ändert sich die magnetische Flussdichte B durch die Fläche A , die vom Ring umschlossen wird. Es wird folglich ein Strom in dem Ring induziert, der wiederum sein eigenes Magnetfeld produziert. Dieses ist in der Grafik durch einen Stabmagneten mit gestrichelten Umrissen angedeutet. Nach der Lenzschen Regel muss dieses neu entstandene Feld dem ursprünglichen Feld entgegenwirken, wodurch die Richtung des Induktionsstroms vorgegeben ist.

Mathematisch lässt sich der Zusammenhang folgendermaßen ausdrücken:

$$U_{ind} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

Die rechte Seite der Gleichung beschreibt die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses $\Phi = \int_A \vec{B} d\vec{A}$ durch die Fläche A , wobei $\vec{A}$ der Normalenvektor der Fläche ist. Vektoren beschreiben Größen, die sowohl einen Betrag, als auch eine Richtung haben, was bei Magnetfeldern und Flächen im Raum der Fall ist. Eine genauere Einführung zu Vektoren findet sich in einem späteren Kapitel. Das Integral dient der Berechnung des Flächeninhalts - in diesem Fall also wie viel magnetische Flussstärke in der Fläche A steckt. Falls das Magnetfeld über die gesamte Fläche konstant ist, vereinfacht sich die Gleichung zu $\Phi = A \cdot B$, also $U_{ind} = -\frac{d}{dt} B \cdot A$. Das entscheidende für die Lenzsche Regel ist hierbei das Minuszeichen. Hierin steckt nämlich die Aussage, dass der Induktionsstrom seiner Ursache entgegen wirkt!

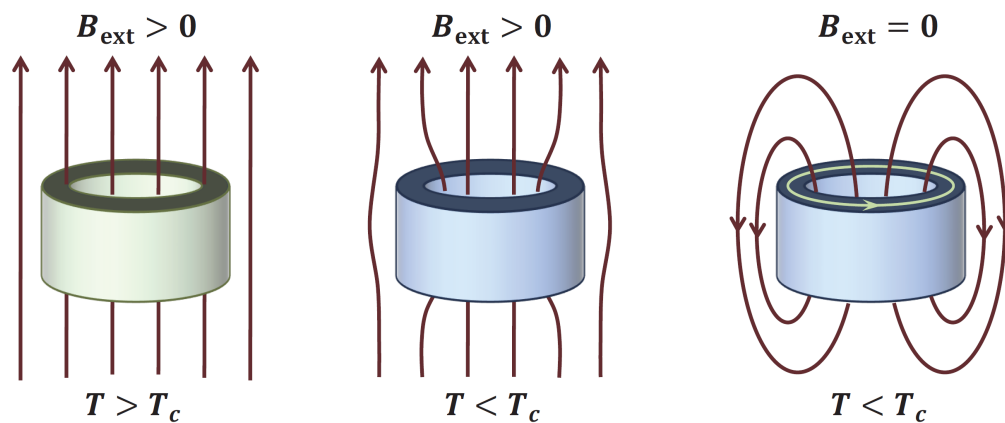


Abbildung 3.2: Schematische Darstellung zur Erzeugung eines Dauerstroms in einem supraleitenden Ring. Für $T > T_c$ wird ein externes Magnetfeld B_{ext} angelegt. Anschließend wird auf $T < T_c$ gekühlt und das Feld abgeschaltet. Die im Ring eingeschlossene magnetische Flussdichte wird nun trotz $B_{ext} = 0$ durch einen Dauerstrom erhalten. [9]

Durchführung des Dauerstromexperiments Zunächst wird in einem Ring aus dem zu untersuchenden supraleitenden Material bei $T > T_c$ ein homogenes, externes Magnetfeld B_{ext} angelegt. Der Ring ist hierbei in normal-leitendem Zustand, da die Temperatur noch oberhalb der Sprungtemperatur ist. Nun senkt man die Temperatur auf $T < T_c$, also unterhalb von

der Sprungtemperatur. Das Magnetfeld penetriert den Supraleiter nicht, aber es besteht ein magnetischer Fluss durch die von dem Supraleiter eingeschlossene Fläche. Entfernt man schließlich das äußere Magnetfeld ($B_{ext} = 0$), während der Supraleiter unterhalb von T_c gekühlt ist, so friert der magnetische Fluss im Inneren der Fläche ein - um diesen zu erhalten, fließt nun ein Kreisstrom I_s durch den Ring. Der Ablauf ist in Abbildung 3.2 schematisch dargestellt.

Um den Widerstand so genau wie möglich zu bestimmen, wird das Abklingverhalten des Stroms gemessen. Die im Ring mit Dauerstrom I gespeicherte Energie E kann ausgerechnet werden durch

$$E = \frac{1}{2}LI^2$$

L : Selbstinduktionskoeffizient

Durch den elektrischen Widerstand R ändert sich die Joulesche Wärme

$$P_{SL} = RI^2 = -\frac{dE}{dt}$$

Aus diesen beiden Größen kann man in einigen Schritten die zeitliche Änderung des Stroms abhängig vom Widerstand ausrechnen:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}LI^2\right) &= RI^2 \\ -\frac{d}{dt}I &= \frac{R}{L}I \\ \xRightarrow{\text{Lösung der DGL}} I(t) &= I_0 \exp\left\{-\frac{Rt}{L}\right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Beispiel: Betrachte einen Drahting mit einem Durchmesser von $\varnothing = 5 \text{ cm}$, der Dicke $d = 1 \text{ mm}$ und dem Selbstinduktionskoeffizienten $L = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ H}$.

Annahme: Nach einer Stunde beträgt die Stromänderung $\frac{\Delta I}{I} < 1 \%$. Nach Gleichung (3.1) ergibt sich hierfür ein Widerstand von $R \leq 4 \cdot 10^{-13} \Omega$. Je länger man warten muss, bis sich eine Stromänderung bemerkbar macht, umso kleiner ist die obere Grenze des Widerstands.

Resultat: Es wurde **nie** ein Abklingen des Stroms beobachtet! Man schlussfolgert also, dass $R \equiv 0$.

Beachte: $R \equiv 0$ gilt nur für DC-Ströme und **kleine** Magnetfelder. Supraleiter 1. Art werden für $B > B_c$ normal-leitend, wobei B_c das kritische Magnetfeld ist. Supraleiter 2. Art haben zwei kritische Magnetfelder B_{c1} und B_{c2} . Für $B > B_{c1}$ haben diese Supraleiter sowohl normal- als auch supraleitende Eigenschaften.

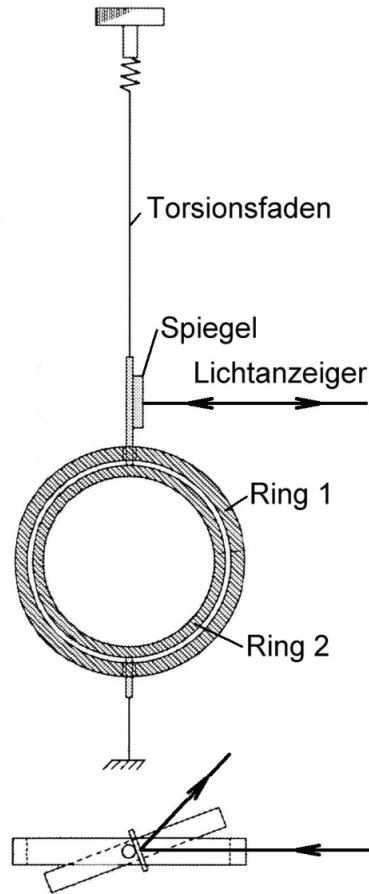


Abbildung 3.3: Anordnung zur Beobachtung eines Dauerstroms. Ring 1 ist am Kryostaten verankert. [7]

Bemerkungen

- Supraleitung bedeutet **Verschwinden** des Widerstands in einem makroskopischen Material.
- Die Ursache für elektrischen Widerstand in **Normalleitern** (Normalzustand) ist die Wechselwirkung der Elektronen mit Phononen, also Schwingungen des Atomgitters, Defekten, etc.
- Im **Supraleiter** weisen Dauerströme auf **einen** quantenmechanischen Zustand für alle supraleitenden Teilchen hin (kollektives Phänomen), der durch die oben genannten Wechselwirkungen nicht gestört ist. Dies erinnert an andere quantenmechanische Zustände, wie z.B. ein Atom mit magnetischem Moment.

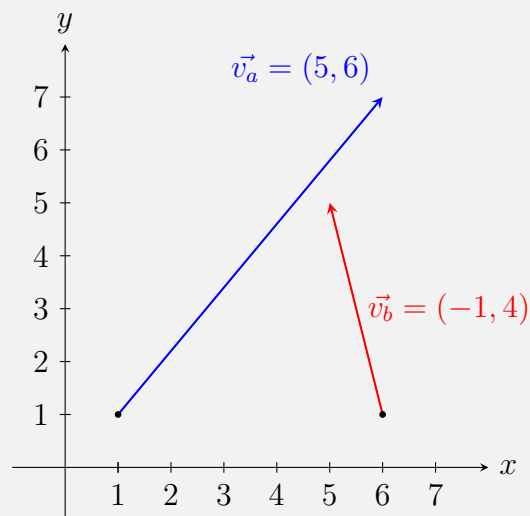
Einführung: Vektoren und Vektorrechnung

Vektoren sind mathematische Objekte, die in mehrdimensionalen Räumen einen Betrag bzw. Länge und eine Richtung angeben. Sie werden über so viele Komponenten angegeben, wie der betrachtete Raum Dimensionen hat. In der Physik sind zum Beispiel Geschwindigkeiten, Impulse, Kräfte, magnetische und elektrische Feldstärken vektorielle Größen.

Beispiel 1: Im zweidimensionalen Raum $\mathbb{R}^2$ braucht man für die Definition eines Vektors zwei Koordinaten:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

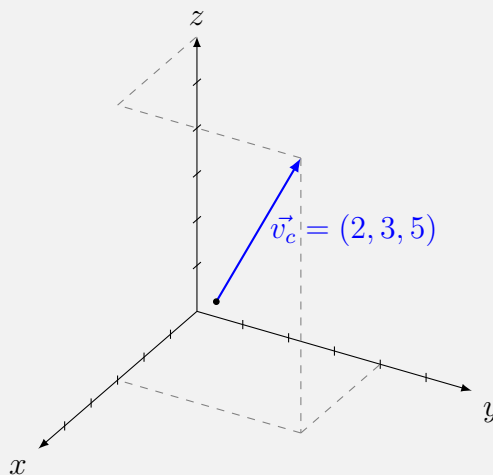
In der Abbildung rechts sind zwei Beispiele für zweidimensionale Vektoren zu sehen. Vektoren haben keinen festen Startpunkt. Daher startet hier der Vektor $\vec{v}_a$ bei den Koordinaten $(x, y) = (1, 1)$ und Vektor $\vec{v}_b$ bei $(x, y) = (6, 1)$. Entscheidend sind nur Richtung und Betrag, die durch die zwei Komponenten v_1 und v_2 angegeben werden.



Beispiel 2: Im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ wird ein Vektor über drei Koordinaten angegeben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Siehe zum Beispiel Vektor $\vec{v}_c$ in der Abbildung rechts. Auch dieser Vektor startet in der Abbildung nicht im Ursprung, sondern bei den Koordinaten $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.



Länge eines Vektors Betrachte den dreidimensionalen Vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Seine Länge bzw. sein Betrag wird folgendermaßen berechnet:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Mit Vektoren kann man natürlich auch rechnen. Sie können miteinander addiert und subtrahiert werden, mit skalaren Größen (nur Betrag, ohne Richtung) und miteinander multipliziert werden.

Addition und Subtraktion Addition und Subtraktion wird komponentenweise durchgeführt. Betrachte zwei dreidimensionale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \implies \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation Betrachte wieder den Vektor $\vec{a}$ und eine reelle Zahl, auch Skalar genannt, r . Für die Multiplikation von r mit $\vec{a}$ gilt:

$$r\vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix} = \vec{a}r$$

Skalarprodukt Achtung! Trotz ähnlicher Bezeichnung handelt es sich hierbei um die Multiplikation von zwei Vektoren miteinander. Das „Skalar“ im Namen kommt daher, dass das Ergebnis dieser Multiplikation eine skalare Größe ist. Betrachte erneut die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Ihr Skalarprodukt ist folgendermaßen definiert:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

wobei φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist. Das Skalarprodukt zweier senkrechter Vektoren ergibt 0.

Kreuzprodukt Während alle bisherigen Operationen auf beliebig-dimensionale Vektoren angewendet werden können (solange die Dimensionen beider Vektoren identisch sind), ist das Kreuzprodukt nur für dreidimensionale Vektoren definiert.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

Das Ergebnis des Kreuzprodukts zweier Vektoren ist also ebenfalls ein Vektor. Dieser steht senkrecht auf den beiden ursprünglichen Vektoren. Sind die beiden Vektoren parallel, ist das Ergebnis der Nullvektor $(0, 0, 0)$.

Divergenz und Rotation Divergenz und Rotation sind Eigenschaften von Vektorfeldern. Betrachte ein Vektorfeld $\vec{F}$:

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_x(x, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Dann ist die **Divergenz** des Vektorfeldes definiert als

$$\operatorname{div}(\vec{F}(x, y, z)) = \frac{\partial}{\partial x} F_x(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} F_y(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} F_z(x, y, z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z)$$

Hierbei ist $\vec{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ der sogenannte **Nabla-Operator**. Die Divergenz kann also als Skalarmultiplikation eines Vektors mit dem Nabla-Operator verstanden werden und ergibt ein Skalarfeld. Das heißt, jedem Punkt (x, y, z) wird eine reelle Zahl zugeordnet, die angibt, wie sehr die Vektoren an diesem Punkt auseinanderstreben („divergieren“). Die **Rotation** des Vektorfeldes $\vec{F}$ ist das Kreuzprodukt aus Nabla-Operator und $\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}(x, y, z)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} F_z(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial z} F_y(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} F_x(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial x} F_z(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_y(x, y, z) - \frac{\partial}{\partial y} F_x(x, y, z) \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z)$$

Das Ergebnis der Rotation ist ebenfalls ein Vektorfeld - jedem Punkt (x, y, z) wird wieder ein Vektor zugeordnet. Ein Vektorfeld, dessen Rotation überall Gleich null ist, nennt man wirbelfrei. Dies ist beispielsweise bei konservativen Kraftfeldern der Fall. Man kann den Nabla-Operator auch auf ein Skalarfeld S , beispielsweise $S(x, y, z) = x + xy + yz$ anwenden. Dies nennt man den **Gradienten** des Skalarfeldes und das Ergebnis ist ein Vektorfeld:

$$\operatorname{grad}(S(x, y, z)) = \vec{\nabla} S(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} S(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial y} S(x, y, z) \\ \frac{\partial}{\partial z} S(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Nun kann man auf den sich ergebenden Gradienten wieder den Nabla-Operator anwenden und erhält die Divergenz des Gradienten des ursprünglichen Skalarfeldes, die wiederum selbst ein Skalarfeld ist:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\{\operatorname{grad}(S(x, y, z))\} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} S(x, y, z)) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) S(x, y, z) \\ &= \vec{\nabla}^2 S(x, y, z) = \Delta S(x, y, z) \end{aligned}$$

Den Operator $\Delta = \vec{\nabla}^2$ nennt man auch **Laplace-Operator**.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

2 Perfekter Diamagnetismus

Das bisherige Ergebnis zeigt einen verschwindenden Widerstand $R = 0$ für $T < T_c$.

Nun wird bei $T < T_c$ ein äußeres Magnetfeld B_a angelegt. Dies induziert nach der Lenzschen Regel Abschirmströme, die B_a entgegenwirken und **Feldfreiheit** im Inneren des Supraleiters

erzeugen, denn es gilt

$$\begin{aligned}
 R = 0 &\implies U = RI = 0 \\
 &\implies U_{ind} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A} = 0 \\
 &\implies -\frac{d}{dt} B = -\dot{B} = 0
 \end{aligned}$$

und wegen $R = 0$ klingen die Abschirmströme nicht ab!

Was passiert nun, wenn B_a bereits im nicht supraleitenden Zustand $T > T_c$ eingeschaltet wird? Zunächst durchdringt B_a den normalleitenden Körper. Anschließend wird bei angelegtem Magnetfeld auf $T < T_c$ gekühlt. Falls $R = 0$ die einzige Eigenschaft des Supraleiters ist, muss der magnetische Fluss den Supraleiter weiter durchdringen. Die Induktion kann nicht wirken, da B_a nicht geändert wird.

Beobachtung: Das Feld wird auch in diesem Fall aus dem Inneren des Körpers verdrängt! Dieses Phänomen ist unter der Bezeichnung „**Meißner-Ochsenfeld-Effekt**“ seit 1933 bekannt.

Beachte: Feldverdrängung gilt nur für kleine Magnetfelder. Große Magnetfelder unterdrücken die Supraleitung oder dringen in Form von Flussschläuchen in den Supraleiter ein (Supraleiter 2. Art bzw. Typ II-Supraleiter).

3 Die Londonschen Gleichungen

Verschwindender Widerstand und Meißner-Ochsenfeld-Effekt werden phänomenologisch durch die **London-Gleichungen** beschrieben (Fritz und Heinz London, 1935).

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda_L^2 \vec{j}_s \quad \text{1. Londonsche Gleichung} \quad (3.2)$$

$$\vec{B} = -\mu_0 \lambda_L^2 \vec{\nabla} \times \vec{j}_s \quad \text{2. Londonsche Gleichung} \quad (3.3)$$

mit

$\vec{j}_s = n_s \vec{v}_s q$: Suprastromdichte

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$: Permeabilitätskonstante

$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 q^2 n_s}}$: Londonsche Eindringtiefe

m : Masse des supraleitenden Teilchens

q : Ladung des supraleitenden Teilchens

n_s : Dichte des supraleitenden Teilchens

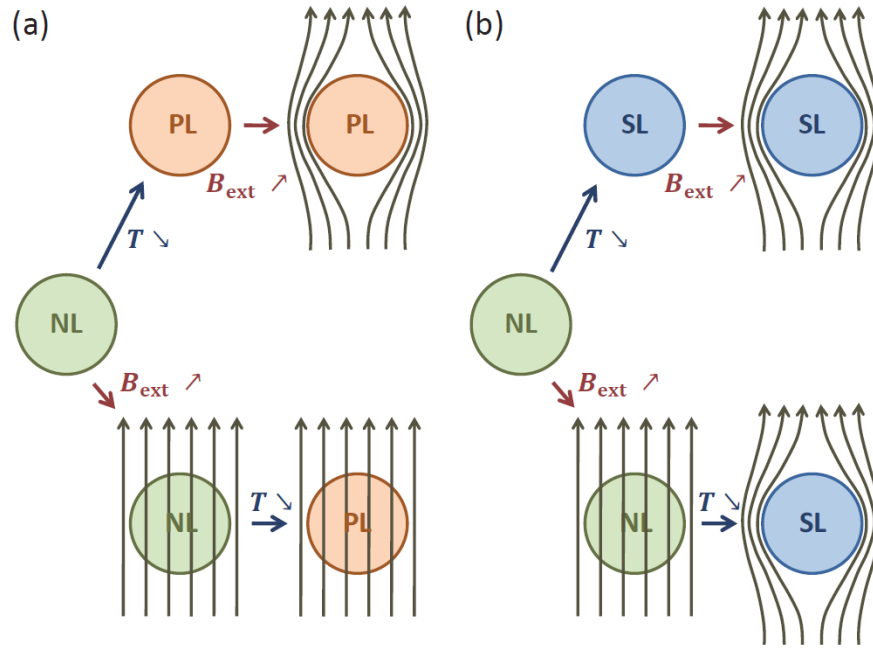


Abbildung 3.4: Schema zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen einem perfekten Leiter (a) und einem Supraleiter (b) im Magnetfeld. (a): Ein Normalleiter (NL) wird beim Abkühlen zu einem perfekten Leiter (PL). Oben: zuerst wird der NL abgekühlt, anschließend wird ein B-Feld angelegt. Unten: zuerst wird ein B-Feld angelegt, anschließend wird der NL abgekühlt. (b): Analog zu (a), nur mit einem Supraleiter (SL) statt einem perfekten Leiter. Während bei einem perfekten Leiter auf beiden Wegen ein unterschiedlicher Endzustand erhalten wird (Magnetfeld wird verdrängt oder penetriert das Innere des Körpers), ist dies bei einem Supraleiter nicht der Fall. [9]

Gleichung (3.2) beschreibt die perfekte Leitfähigkeit. Für ein anschauliches Verständnis kann man das Drude-Modell betrachten:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} - m \frac{\vec{v}}{\tau} \quad \text{Kraftgleichung}$$

$\vec{v}$: mittlere Driftgeschwindigkeit, τ : Relaxationszeit

Die Relaxationszeit beschreibt die mittlere Zeit, um die Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Ladungsträger durch Stoßprozesse auf $\vec{v} = 0$ zu bringen.

In einem normalen Metall im stationären Zustand (steady state drift) gilt

$$\vec{v} = q \frac{\tau}{m} \vec{E}$$

Mit dem Ohmschen Gesetz $\vec{j} = \sigma \vec{E}$:

$$\vec{j} = ne\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} = \sigma \vec{E}$$

Nehme nun an, dass es supraleitende Teilchen mit einer Dichte n_s und einer Ladung q gibt, die **nicht** gestreut werden ($\tau \rightarrow \infty$):

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \frac{q}{m} \vec{E} \quad \text{beschleunigte Ladungsträger!}$$

Dann erhält man schließlich die totale Suprastromdichte

$$\frac{d}{dt} \vec{j}_s = \frac{n_s q^2}{m} \vec{E} = \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{E}$$

Dies entspricht der 1. Londonschen Gleichung (3.2).

Für die 2. Londonsche Gleichung lässt sich keine anschauliche Motivation geben. Sie kann aber mit der Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_s$$

kombiniert werden. Nutze dazu

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu \mu_0 \vec{H} \quad \text{mit } \mu = 1 \quad (\text{unmagnetischer Supraleiter}) \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} \end{aligned}$$

Bilde die Rotation:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{j}_s \Leftrightarrow \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}_0 - \vec{\nabla}^2 \vec{B} \stackrel{2.LG}{=} -\frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}$$

Diese Gleichung gibt den Meißner-Ochsenfeld-Effekt wieder und impliziert, dass ein Magnetfeld exponentiell vom Inneren des Supraleiters abgeschirmt wird, und zwar mit der Eindringtiefe λ_L !

Beispiel 1: Betrachte einen Supraleiter im Halbraum $x > 0$ mit magnetischer Flussdichte $\vec{B}_a = (0, 0, B_a)$. Damit wird das Problem auf eine Dimension beschränkt.

$$\frac{d^2}{dx^2} B_z(x) = \frac{1}{\lambda_L^2} B_z(x) \quad (3.4)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$B_z(x) = B_z(0) \exp\left\{\frac{-x}{\lambda_L}\right\}$$

Die mit x anwachsende Lösung $B_z(x) = B_z(0) \exp\left\{\frac{+x}{\lambda_L}\right\}$ ist nicht sinnvoll, weil dann $B = \infty$ im Inneren gelten würde.

λ_L kann versuchsweise, um ein Gefühl für die Größenordnung zu bekommen, mittels Elektronenmasse m , Elektronenladung e und Dichte n abgeschätzt werden:

$$\lambda_L \xrightarrow{T \rightarrow 0} \sqrt{\frac{m_e}{\mu_0 e^2 n}}$$

Für S_n ergibt dies: $\lambda_L = 26 \text{ nm}$. Dies ist in guter Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen, welche ein $\lambda_L = 25 - 36 \text{ nm}$ zeigen.

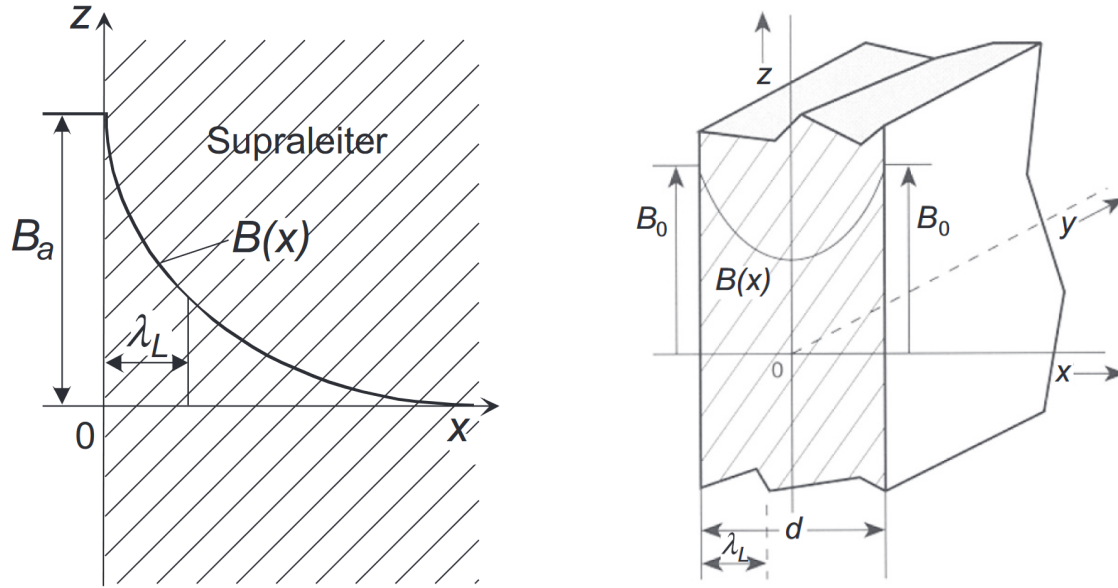


Abbildung 3.5: Abnahme des magnetischen Feldes in einem Supraleiter an einer Grenzfläche. Links: Grafik zu Beispiel 1 - Supraleiter im Halbraum $x > 0$. Rechts: Grafik zu Beispiel 2 - dünne supraleitende Platte mit Dicke d . [7]

Beispiel 2: Betrachte eine dünne supraleitende Platte mit Dicke d . Wie oben sei die Platte in der $y - z$ -Ebene ausgedehnt und $\vec{B}_a = (0, 0, B_a)$. Benutze wieder die eindimensionale Differentialgleichung (3.4), diesmal mit komplexer Lösung:

$$B_z(x) = B_1 \exp\left\{-\frac{x}{\lambda_L}\right\} + B_2 \exp\left\{+\frac{x}{\lambda_L}\right\} \quad (3.5)$$

Setzen wir nun die Randbedingungen für $x = \frac{d}{2}$ und $x = -\frac{d}{2}$ ein:

$$B_a = B_1 \exp\left\{-\frac{d}{2\lambda_L}\right\} + B_2 \exp\left\{+\frac{d}{2\lambda_L}\right\}$$

Außerdem ist das Problem symmetrisch in x : $B_1 = B_2 = B^*$.

$$B_a = B^* \left(\exp\left\{\frac{-d}{2\lambda_L}\right\} + \exp\left\{+\frac{d}{2\lambda_L}\right\} \right) = B^* \cdot 2 \cosh \frac{d}{2\lambda_L}$$

$$B^* = \frac{B_a}{2 \cosh d/2\lambda_L}$$

Die Lösung für B_z ist also

$$B_z(x) = B_a \cdot \frac{\cosh \frac{x}{\lambda_L}}{\cosh \frac{d}{2\lambda_L}} \quad (3.6)$$

- Für $d \ll \lambda_L$: exponentieller Abfall von beiden Seiten und Feldfreiheit $B \approx 0$ im Inneren
- $d \rightarrow \lambda_L$: immer geringere Feldvariation im Inneren
- $d \rightarrow 0$: vollständige Felddurchdringung

Betrachte die Abschirmströme: Benutze $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_s$ mit $\vec{B} = (0, 0, B_z(x))$. $B_z(x)$ ist hierbei wie in Gleichung (3.6).

$$\mu_0 j_{s,y} = -\frac{d}{dx} B_z$$

Also ist es nur die y -Komponente, die ins Innere des Supraleiters abfällt.

Für Halbraum (Beispiel 1):

$$j_{s,y} = \frac{B_a}{\mu_0 \lambda_L} \exp\left\{-\frac{x}{\lambda_L}\right\}; \quad \text{an Oberfläche: } j_{s,y} = \frac{B_a}{\mu_0 \lambda_L}$$

Für dünne Platte (Beispiel 2):

$$j_{s,y} = -\frac{B_a}{\mu_0 \lambda_L} - \frac{\sinh x / \lambda_L}{\cosh d / 2 \lambda_L}$$

an Oberfläche $x = -\frac{d}{2}$: $j_{s,y}\left(-\frac{d}{2}\right) = \frac{B_a}{\mu_0 \lambda_L} \tanh \frac{d}{2 \lambda_L} = -j_{s,y}\left(\frac{d}{2}\right)$

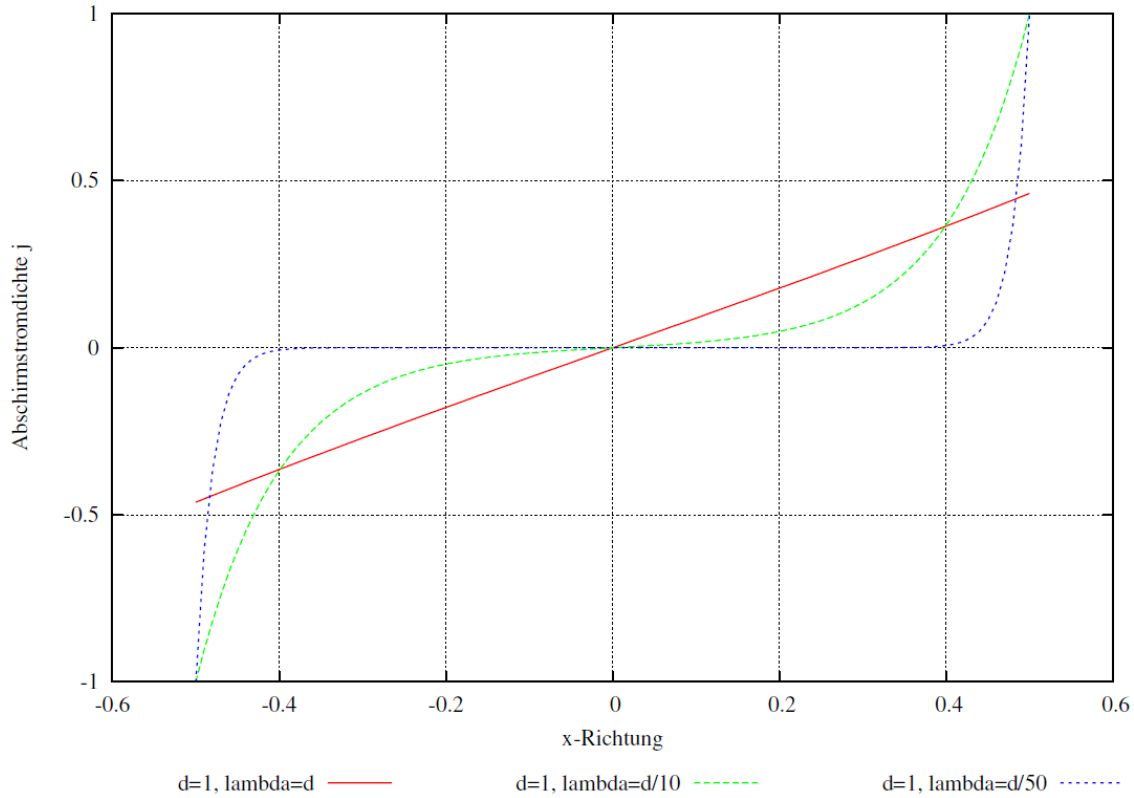


Abbildung 3.6: Die Abschirmstromdichte in der dünnen supraleitenden Platte abhängig von dem Verhältnis von Dicke d und Eindringtiefe λ .

3.1 Vertiefung: London-Gleichungen und quantenmechanische Motivation

Betrachte erneut die 2. Londonsche Gleichung:

$$\vec{B} = -\mu_0 \lambda_L^2 \vec{\nabla} \times \vec{j}_s$$

Betrachte die Zeitableitung:

$$\dot{\vec{B}} = -\mu_0 \lambda_L^2 \vec{\nabla} \times \dot{\vec{j}}_s$$

Mit der Maxwell-Gleichung $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \mu_0 \lambda_L^2 \vec{\nabla} \times \dot{\vec{j}}_s \\ \implies \vec{E} &= \mu_0 \lambda_L^2 \dot{\vec{j}}_s \end{aligned}$$

Bis auf Konstanten ist dies identisch mit der 1. Londonschen Gleichung!

Dies bedeutet, dass die 1. Londonsche Gleichung, die den verschwindenden Widerstand beschreibt, eine Konsequenz der 2. Londonschen Gleichung, also des perfekten Diamagnetismus, ist! Es ist also notwendig, die 2. Londonsche Gleichung zu motivieren, da sie offenbar die entscheidende Physik enthält.

Annahme: Das makroskopische Phänomen Supraleitung kann durch **einen** kanonischen Impuls (d.h. Wellenlänge) beschrieben werden.

$$\hbar \vec{k} = \vec{p}_s = m \vec{v}_s + q \vec{A} \quad (3.7)$$

mit $\vec{A}$ dem Vektorpotential $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$.

Wir nehmen an, dass alle supraleitenden Teilchen den gleichen Quantenzustand annehmen und $\vec{p}_s = 0$:

$$m \vec{v}_s = -q \vec{A}$$

Mit Dichte n_s der supraleitenden Teilchen folgt

$$\begin{aligned} \vec{j}_s &= q n_s \vec{v}_s = -\frac{q^2 n_s}{m} \vec{A} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{A} \\ \implies 2. \text{ Londonsche Gleichung: } \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\mu_0 \lambda_L^2 \vec{\nabla} \times \vec{j}_s \end{aligned}$$

4 Flussquantisierung

Wenn **alle** supraleitenden Teilchen den gleichen Quantenzustand einnehmen, dann kann man auch alle supraleitenden Teilchen mit **einer** makroskopischen Wellenfunktion beschreiben.

$$\Psi(\vec{r}) \equiv |\Psi(\vec{r})| \exp\{i\varphi(\vec{r})\} \quad (3.8)$$

Das Amplitudenquadrat

$$|\Psi|^2 = n_s$$

beschreibt die Teilchendichte bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte.

Aus der Quantenmechanik ist die Teilchenstromdichte bekannt:

$$n_s \vec{v}_s = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi) - \frac{qn_s}{m} \vec{A} \stackrel{(3.8)}{=} -2in_s \vec{\nabla} \varphi$$

Vergleiche mit Gleichung (3.7):

$$\vec{p}_s = \hbar \vec{\nabla} \varphi = \hbar \vec{k}$$

Betrachte nun einen supraleitenden Ring mit einer Dicke $d \gg \lambda_L$. Die supraleitende Wellenfunktion im Ring muss eindeutig bestimmt sein.

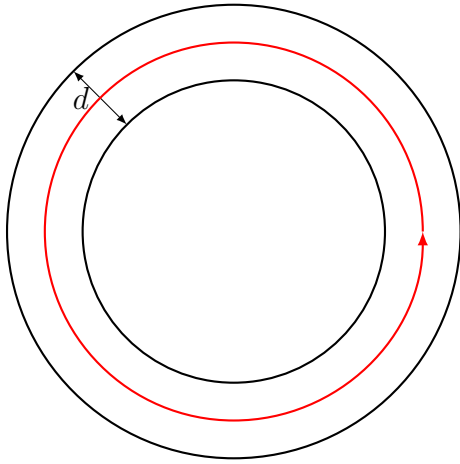


Abbildung 3.7: Supraleitender Ring mit Dicke d . In rot ist ein Integrationspfad P durch das Innere des Rings markiert.

Beim Umlauf eines beliebigen Pfades P muss die Phase von Gleichung (3.8) modulo 2π in sich übergehen.

$$\Rightarrow \oint \vec{k} d\vec{l} = \oint \vec{\nabla} \varphi d\vec{l} = n \cdot 2\pi; \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

Betrachte den kanonischen Impuls (3.7):

$$\oint \vec{\nabla} \varphi d\vec{l} = \frac{1}{\hbar} \oint \vec{p}_s d\vec{l} = \frac{m}{\hbar} \oint \vec{v} d\vec{l} + \frac{q}{\hbar} \oint \vec{A} d\vec{l}$$

Mit dem Satz von Stokes wird $\oint \vec{A} d\vec{l}$ zu:

$$\begin{aligned} \oint \vec{A} d\vec{l} &= \int_F \vec{\nabla} \times \vec{A} d\vec{F} = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = \Phi \\ &\Rightarrow \frac{nh}{q} = \frac{m}{q} \oint \vec{v} d\vec{l} + \Phi \end{aligned} \tag{3.9}$$

Fazit: Das Ergebnis ist eine **Quantenbedingung**, die den magnetischen Fluss Φ durch den Ring mit dem Planckschen Wirkungsquantum h und der Ladung q des Teilchens verknüpft. In guter Näherung gilt

$$\Phi = n \cdot \frac{h}{q}$$

d.h. der Fluss in einem supraleitenden Ring ist quantisiert! Wir definieren das sogenannte „Flussquant“

$$\Phi_0 = \frac{h}{q}$$

Damit wird Φ zu

$$\Phi = n \cdot \Phi_0$$

Dies ist die sogenannte **Flussquantisierung**.

Anfangs wurde gefordert, dass **alle** Teilchen den **gleichen** Quantenzustand einnehmen. Das Elektron ist wegen seines Halbzahligens Spins $s = \frac{1}{2}$ ein Fermion. Wegen des Pauli-Prinzips können einzelne Elektronen nicht Teil des Quantenzustands (3.8) sein. Die einfachste Möglichkeit, aus Elektronen ein Teilchen mit ganzzahligem Spin zu bauen, ist die Elektronen-Paarung.

Durch experimentelle Messung von Φ_0 kann q bestimmt werden und so die Hypothese der Elektronenpaarung geprüft werden.

Experimente zur Flussquantisierung

Vorbetrachtung: Nehme an, dass $q = 2e$ ist. Damit können wir die Größenordnung von Φ_0 annehmen zu $\Phi_0 = \frac{h}{2e} = 2,07 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2$. Außerdem gilt für das eingefrorene Feld im supraleitenden Ring: $B = \frac{\Phi}{A}$, wobei A die vom Ring eingeschlossene Fläche ist.

Annahme: Der Ring hat einen Durchmesser von $\varnothing = 1 \text{ mm}$. Damit beträgt das Einfrierfeld $B_e = 2 \cdot 10^{-9} \text{ T}$. Das Erdmagnetfeld beträgt ca. $60 \mu\text{T}$; der Ringdurchmesser muss also sehr klein gewählt werden.

Experimentelle Realisierung: $\varnothing = 10 \mu\text{m} \implies B_e = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

Experiment von R. Doll und M. Nähbauer (Phys. Rev. Lett. 7, 51, 1961). F' Durch Abkühlen des Rings im äußeren Feld B_e wird der Fluss eingefroren. Anschließend wird der eingefrorene Fluss gemessen, anhand des Drehmoments, das ein äußeres Feld B_M erzeugt. Diese Messung geschieht durch die Herstellung einer Resonanzbedingung mittels Umpolen von B_M durch einen Photosensor. Der Aufbau ist in Abbildung 3.8 schematisch dargestellt.

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \Delta B_e A \approx 0,2 \cdot 10^{-4} \text{ T} \cdot \frac{\pi}{4} (10^{-3} \text{ m})^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 10 \cdot 10^{-15} \text{ Tm}^2 \\ \implies q &= \frac{h}{\Delta\Phi} \approx 4,2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \approx 2,6 e \\ \implies q &> 2 e \end{aligned}$$

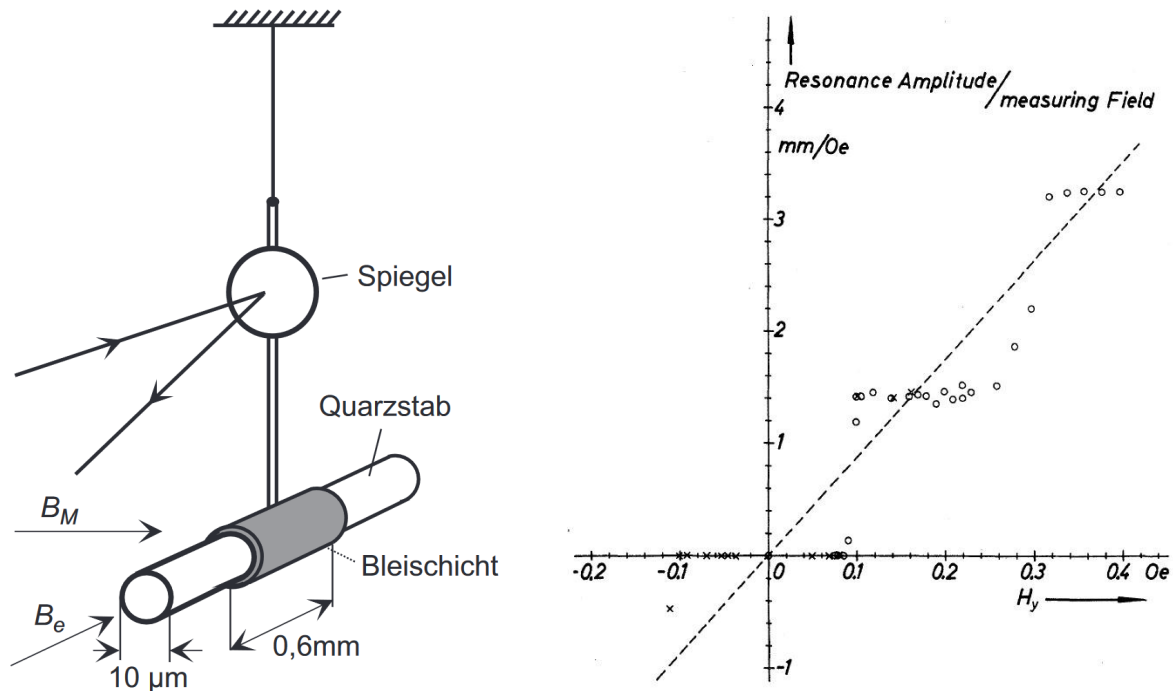


Abbildung 3.8: Experimenteller Aufbau zur Bestimmung der Flussquantisierung mittels einer Drehmomentmessung und Messergebnisse. [7]

Die Ladung eines supraleitenden Teilchens ist also größer gleich der Ladung von zwei Elektronen!

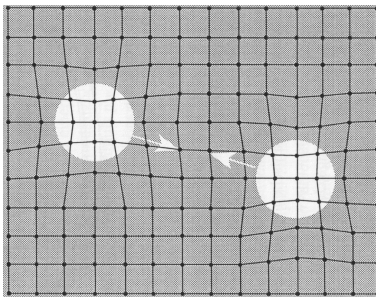


Abbildung 3.9: Symbolische Repräsentation eines „Cooper-Paars“: Zwei Elektronen mit entgegengesetztem Spin vereinigen sich zu einem supraleitenden Teilchen mit ganzzahligem Spin. [7]

5 Kritische Magnetfelder

Bisher waren alle betrachteten Magnetfelder klein. Experimente zeigten aber schnell, dass große Magnetfelder die Supraleitung unterdrücken, d.h. Normalleitung wiederherstellen (Onnes 1914, Tuyn & Onnes 1924, de Haas & Voogd 1931).

Befunde:

Typ-I-Supraleiter

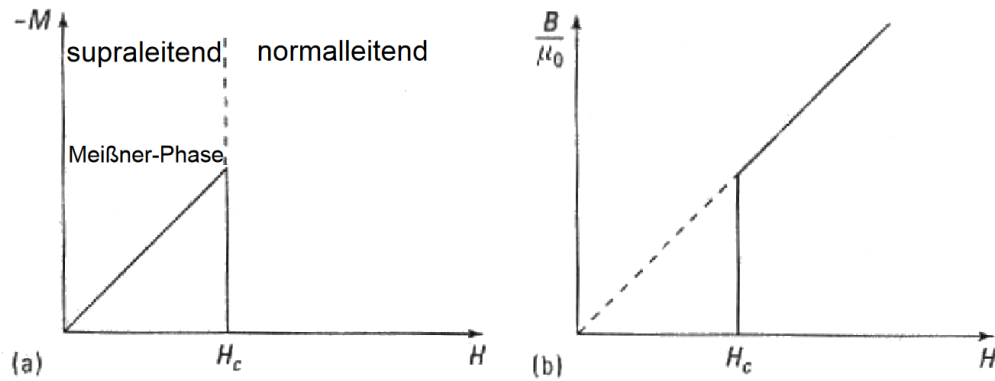


Abbildung 3.10: Inneres magnetisches Feld B und Magnetisierung M eines Typ-I Supraleiters abhängig vom äußeren Feld H . [1]

- Für $B_a < B_c$: Meißner-Ochsenfeld-Effekt, d.h. $B_i = 0$ im Inneren
- Für $B_a > B_c$: $B_i = B_a$ im Inneren, d.h. die Supraleitung bricht zusammen.

B_c ist temperaturabhängig.

Typ-II-Supraleiter

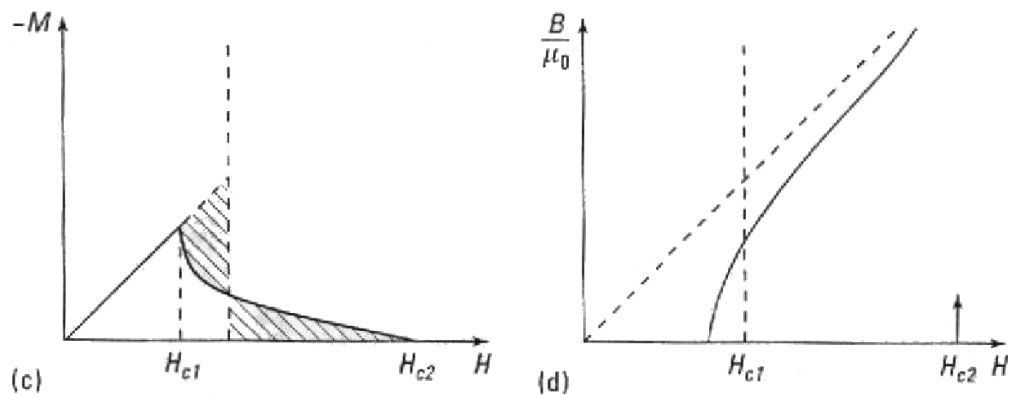


Abbildung 3.11: Inneres magnetisches Feld B und Magnetisierung M eines Typ-II Supraleiters abhängig vom äußeren Feld H . [1]

- Für $B_a < B_{c1}$: $B_i = 0$ im Inneren (Meißner-Ochsenfeld-Effekt)
- Für $B_a > B_{c2}$: $B_i = B_a$ im Inneren (Normalzustand)
- Für $B_{c1} < B_a < B_{c2}$: $B_i > 0$ im Inneren (gemischter Zustand, auch Shubnikov-Phase genannt)

A. A. Abrikosov stellte fest, dass im gemischten Zustand magnetische Flussschläuche sich **innerhalb** des Supraleiters befinden, die jeweils einen magnetischen Fluss Φ_0 pro Schlauch aufweisen.

6 Energielücke der Supraleiter

Ein wichtiger Schritt zum Verständnis der Supraleiter war die Entdeckung der Energielücke

$$\Delta \sim k_B T_c$$

für elektronische Anregungen aus dem Grundzustand. Das heißt, Pro Teilchen, das in den normalleitenden Zustand angeregt wird, muss eine Anregungsenergie von ca. $1.5k_B T_c$ aufgewendet werden.

LITERATUR

- [1] Diana Bednarczyk. *Supraleitung*. 2001. URL: <http://www.torabi.de/physik/projektlabor/bin/PL%20268%20Supraleitung.pdf>.
- [2] R. Remmert und G. Schumacher. *Funktionentheorie 1*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2002. ISBN: 9783540418559.
- [3] Jennifer Eve Hoffman. „A Search for Alternative Electronic Order in the High Temperature Superconductor $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+}$ by Scanning Tunneling Microscopy“. Diss. University of California, Berkeley, 2003.
- [4] Piotr Jaworski. *EfektMeisnera*. 2005. URL: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EfektMeisnera.svg>.
- [5] Rafaelgarcia. *Electrona in crystallo fluentia*. 2007. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electrona_in_crystallo_fluentia.png.
- [6] D Nikolic und Ljubisa Nesic. „Verification of the uncertainty principle by using diffraction of light waves“. In: *European Journal of Physics* 32 (Feb. 2011), S. 467. DOI: [10.1088/0143-0807/32/2/018](https://doi.org/10.1088/0143-0807/32/2/018).
- [7] W. Buckel und R. Kleiner. *Supraleitung: Grundlagen und Anwendungen*. Lehrbuch Physik. Wiley, 2013. ISBN: 9783527668694. URL: <https://books.google.de/books?id=murLEmBNzAMC>.
- [8] K. Königsberger. *Analysis 1*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 9783642980671.
- [9] Rudolf Gross und Achim Marx. *Festkörperphysik*. München: De Gruyter Oldenbourg, 2014. ISBN: 9783110358704. DOI: [doi:10.1524/9783110358704](https://doi.org/10.1524/9783110358704). URL: <https://doi.org/10.1524/9783110358704>.
- [10] PJRay. *Timeline of Superconductivity from 1900 to 2015*. 2015. URL: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Timeline_of_Superconductivity_from_1900_to_2015.svg.
- [11] SPIEGEL ONLINE. *Das Periodensystem wächst*. 2016. URL: <https://www.spiegel.de/wissenschaft/natur/periodensystem-wachstum-mit-vier-neuen-elementen-a-1123795.html>.
- [12] educentral Lehrmittel. *Lenzsche Regel - Ringe - PHYPLUS-Set*. 2024. URL: <https://www.educentral.de/p/lenzsche-regel-ringe-phyplus-set>.
- [13] International Superconductivity Research Center (ISTEC). *Nihon-SUMO, Japan*.