

Teil I

Mathematische Grundlagen

KAPITEL 1

KOMPLEXE ZAHLEN

1 Quadratische Gleichungen

Um an einem Punkt zu starten, mit dem alle Schüler der Oberstufe vertraut sein sollten, beginnen wir mit einer kurzen Wiederholung zu quadratischen Gleichungen.

Definition 1.1: Quadratische Funktion

- Eine quadratische Funktion f bildet eine reelle Zahl x auf eine andere reelle Zahl $f(x)$ ab, gemäß der Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (1.1)$$

wobei a_0 , a_1 und a_2 beliebige aber feste reelle Zahlen sind, mit der Einschränkung $a_2 \neq 0$.

- Die Gleichung

$$f(x_0) = 0 \quad (1.2)$$

mit einer quadratischen Funktion f heißt *quadratische Gleichung*. x_0 nennt man auch die Nullstelle von f .

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass man f mit einer beliebigen Konstante $c \neq 0$ multiplizieren kann und dies die Nullstellen nicht verändert. Es ist häufig zweckmäßig $c = \frac{1}{a_2}$ zu wählen. Die Funktion cf nimmt dann die Form

$$cf(x) = \frac{1}{a_2}f(x) = x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} =: x^2 + px + q \quad (1.3)$$

an. Mit dieser Darstellung lässt sich dann folgendes Theorem leicht beweisen.

Theorem 1.2: $p - q$ -Formel

Sei f eine quadratische Funktion.

- Wenn $4q > p^2$, hat f keine Nullstelle.
- Wenn $4q = p^2$, hat f eine Nullstelle, die gegeben ist durch

$$x_0 = -\frac{p}{2}. \quad (1.4)$$

- Wenn $4q < p^2$, hat f zwei Nullstellen, die gegeben sind durch

$$x_0^a = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad (1.5)$$

$$x_0^b = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (1.6)$$

Beweis.

Übungsaufgabe. ■

Beispiel : Einfache quadratische Gleichungen

•

$$f(x) = x^2 - 1$$

Da $p = 0$ und $q = -1$ gilt, trifft der dritte Fall zu und die Nullstellen sind 1 und -1 .

•

$$f(x) = x^2$$

Da $p = 0$ und $q = 0$ gilt, trifft der zweite Fall zu und die Nullstellen ist 0.

•

$$f(x) = x^2 + 1$$

Da $p = 0$ und $q = 1$ gilt, trifft der erste Fall zu es gibt keine Lösung. ■

2 Die imaginäre Einheit i und die komplexe Zahlenebene

Es ist zweckmäßig nun eine neue Zahl i zu definieren, die eine Nullstelle von $f(x) = x^2 + 1$ ist. Es gilt also

$$i^2 = -1 \quad (1.7)$$

und man kann direkt nachrechnen, dass $-i$ dieselbe Eigenschaft hat. Beide Zahlen i und $-i$ sind offensichtlich keine reellen Zahlen und deswegen kann man sie auch nicht auf dem Zahlenstrahl finden. Wir lösen dieses Problem, indem der Zahlenstrahl um eine senkrechte Achse erweitert wird, auf der wir i und $-i$ finden. Veranschaulicht wird dies auf der linken Seite in Abbildung 1.1.

Durch das Verwenden der gesamten Ebene lassen sich nun auch Summen von reellen Zahlen mit imaginären Zahlen definieren. Wie man auf der rechten Seite von Abbildung 1.1 sehen kann, befindet sich der Zahlenwert $2+i$ bei den Koordinaten $(2, 1)$ und der Zahlenwert $-3-2i$ bei $(-2, -3)$, bzw. hat $z = x + iy$ im allgemeinen die Koordinaten (x, y) ¹.

Insbesondere gilt nun mit den komplexen Zahlen, dass alle quadratischen Gleichungen ein oder zwei Lösungen haben. Um beispielsweise die Gleichung $x^2 = i$ zu lösen, braucht man keine zusätzliche Erweiterung des Zahlenraums. Auch die Gleichung

$$x^2 = -n \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.8)$$

ist nun vollständig lösbar durch $x = \pm i\sqrt{n}$. Viele nennen i auch die Wurzel aus -1 , das ist aber nicht ganz korrekt, da es zu Widersprüchen führen kann wie im folgenden Beispiel:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = \sqrt{(-1)}^2 = i^2 = -1 \quad (1.9)$$

Definition 2.1: Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Dann heißt x der Realteil und y der Imaginärteil von z . Für den Realteil schreibt man auch häufig $\operatorname{Re}(z)$ und für den Imaginärteil $\operatorname{Im}(z)$:

3 Rechnen mit komplexen Zahlen

Natürlich wollen wir mit komplexen Zahl genauso rechnen können, wie wir es mit reellen Zahlen gewohnt sind. Dafür definieren wir nun die Rechenvorschriften.

¹Statt $x + iy$ kann man auch $x + yi$ schreiben.

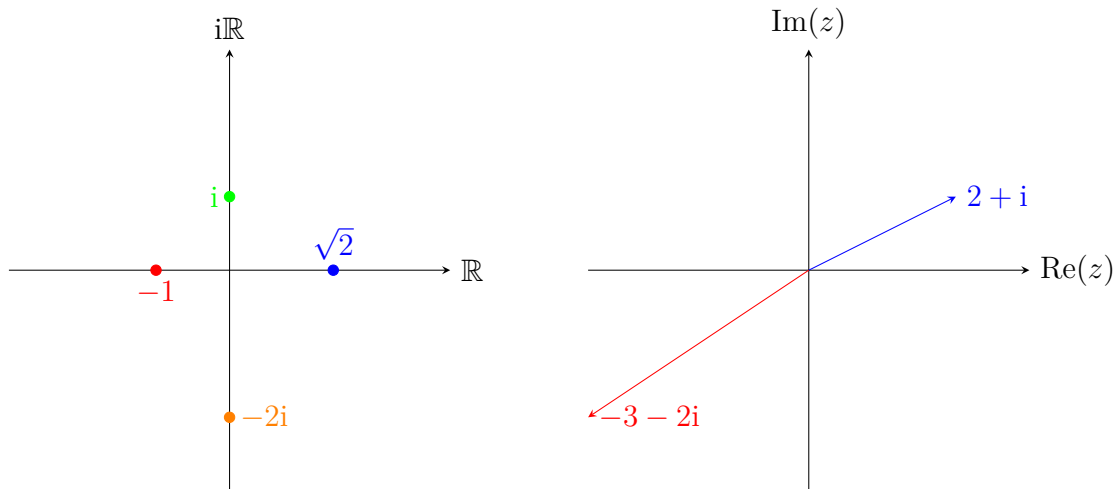


Abbildung 1.1: Auf der rechten Seite der Abbildung sehen wir die imaginäre Achse, die senkrecht auf der reellen Achse steht. Beide Achsen spannen zusammen die komplexe Ebene auf (rechte Seite), auf der wir alle komplexen Zahlen $z = x + iy$ finden.

Definition 3.1: Rechenregeln für komplexe Zahlen

Seien $z = x + iy$ und $z' = x' + iy'$ zwei beliebige aber feste komplexe Zahlen. Dann definieren wir die folgenden Rechenoperationen:

- Addition

$$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \quad (1.10)$$

- Subtraktion

$$z - z' = (x + iy) - (x' + iy') = (x - x') + i(y - y') \quad (1.11)$$

- Multiplikation

$$z \cdot z' = (x + iy) \cdot (x' + iy') = (x \cdot x' - y \cdot y') + i(x \cdot y' + y \cdot x') \quad (1.12)$$

- Konjugation

$$z^* = x - iy \quad (1.13)$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln.

Theorem 3.2: Rechenregeln für komplexe Zahlen

Seien z , z' und z'' komplexe Zahlen. Dann gilt:

- Kommutativität

$$z \cdot z' = z' \cdot z \quad (1.14)$$

$$z + z' = z' + z \quad (1.15)$$

- Distributivität

$$z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z'' \quad (1.16)$$

- Assoziativität

$$z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z'' \quad (1.17)$$

$$z + (z' + z'') = (z + z') + z'' \quad (1.18)$$

Zur Veranschaulichung folgt ein Beispiel.

Beispiel : Rechnen mit komplexen Zahlen

Sei $z = 2 + i$ und $z' = 3 + 2i$.

$$z + z' = (2 + 3) + (1 + 2)i = 5 + 3i \quad (1.19)$$

$$z - z' = (2 - 3) + (1 - 2)i = -1 - i \quad (1.20)$$

$$z \cdot z' = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + (2 \cdot 2 + 1 \cdot 3)i = 4 + 7i \quad (1.21)$$

$$z^* = 2 - i \quad (1.22)$$

Wie vielleicht schon aufgefallen ist, fehlt hier die Division. Dafür braucht es ein klein wenig Vorarbeit. Wir gucken uns dafür an, was passiert ein Element mit seinem Konjugierten multipliziert wird.

Definition 3.3: Betragsquadrat

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = (x^2 + y^2) + 0i = x^2 + y^2 \quad (1.23)$$

Das Ergebnis ist also eine rein reelle Zahl, die häufig $|z|^2$ genannt wird. Nun können wir beide Seiten der Gleichung durch $|z|^2$ und durch z teilen und erhalten:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (1.24)$$

Damit lässt sich nun die Division von komplexen Zahlen definieren.

Definition 3.4: Division komplexer Zahlen

$$\frac{z'}{z} = z' \cdot \frac{1}{z} = \frac{z'z^*}{|z|^2} \quad (1.25)$$

Beispiel : Division komplexer Zahlen

Sei $z = 2 + i$ und $z' = 3 + 2i$.

$$\frac{z}{z'} = \frac{(2 + i)(3 - 2i)}{3^2 + 2^2} = \frac{8 - i}{13} = \frac{8}{13} - \frac{1}{13}i \quad (1.26)$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{(2 - i)(3 + 2i)}{1^2 + 2^2} = \frac{8 + i}{5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}i \quad (1.27)$$

4 Polarkoordinaten

Eine komplexe Zahl kann nicht nur über ihren Real- und Imaginärteil definiert werden², sondern auch über ihren Abstand zum Ursprung (Betrag) und den Winkel, den die Ursprungsgerade und die reelle Achse einschließen (Argument). Hier ist drauf zu achten, dass in der Physik (und in der Mathematik) Winkel im Bogenmaß statt im Gradmaß angegeben werden. Um Gradmaß in Bogenmaß umzurechnen multipliziert man mit $\frac{\pi}{180^\circ}$. Um Bogenmaß in Gradmaß umzurechnen multipliziert man mit $\frac{180^\circ}{\pi}$. In Abbildung 1.2 wird die Polardarstellung komplexer Zahlen visualisiert.

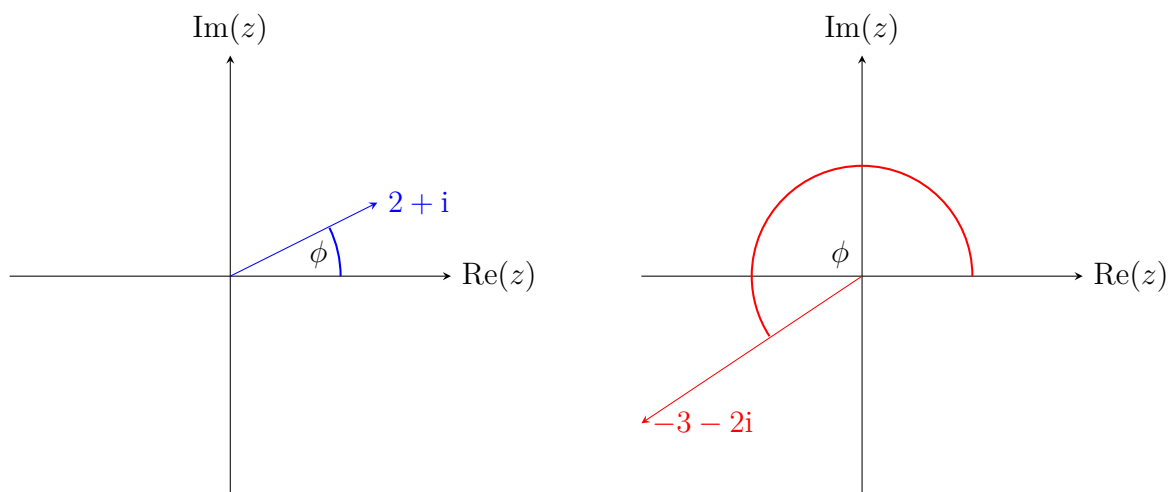


Abbildung 1.2: Veranschaulichung zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinaten. Die Länge des Pfeils entspricht dem Betrag $|z|$ und der vom Bogen eingeschlossene Winkel entspricht dem Argument ϕ

²Dies nennt man auch kartesische Darstellung.

Theorem 4.1: Wechsel zwischen den Koordinaten

Sei z eine komplexe Zahl mit Realteil x , Imaginärteil y , Betrag r und Argument ϕ .

- Um Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten umzurechnen, benutzt man die Formeln:

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad (1.28)$$

- Die Umrechnung von kartesischen in Polarkoordinaten ist etwas umständlicher.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0, y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0, y < 0 \end{cases} \quad (1.29)$$

Wenn $x = 0 = y$ vorliegt, ist das Argument nicht definiert.

An dieser Stelle sei gesagt, dass die Darstellung in Polarkoordinaten nicht eindeutig ist. ϕ und $\phi + 2\pi n$ für ganze Zahlen n stellen dieselbe Zahl da. Meistens wählt man ϕ dann im Intervall $(-\pi, \pi]$. Für die schnelle Berechnung von Sinus- und Kosinuswerten kann folgende Tabelle helfen:

ϕ [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ϕ [°]	0	30	45	60	90
$\sin \phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos \phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Tabelle 1.1: Tabelle zur schnellen Bestimmung von Werten des Sinus und Cosinus

Beispiel : Wechsel zwischen den Koordinaten

- Sei $z = -1 + i$. Dann sind Betrag und Argument gegeben durch

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad (1.30)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{1}{4}\pi + \pi = \frac{3\pi}{4} \quad (1.31)$$

- Sei $r = 2$ und $\phi = \frac{\pi}{3}$. Dann sind Real- und Imaginärteil gegeben durch

$$x = 2 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad (1.32)$$

$$y = 2 \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \quad (1.33)$$

5 Spezielle Funktionen I

Im folgenden Kapitel werden Sinus und Kosinus als Funktionen untersucht und es wird die (komplexe) Exponentialfunktion eingeführt.

Definition 5.1: Sinus, Kosinus und Exponentialfunktion

- Der Sinus (im Bogenmaß) ist definiert als

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \quad (1.34)$$

- Der Cosinus (im Bogenmaß) ist definiert als

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \quad (1.35)$$

- Die Exponentialfunktion ist definiert als

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots \quad (1.36)$$

Theorem 5.2: Die Eulersche Identität

$$\exp(ix) = \cos(x) + i \sin(x) \quad (1.37)$$

Insbesondere gilt für $x = \pi$:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (1.38)$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(x) + i \sin(x)
\end{aligned}$$

Man kann nun komplexe Zahlen in Polardarstellung wesentlich effizienter schreiben:

$$z = x + iy = r \cos(\phi) + r \sin(\phi)i = r(\cos(\psi) + i \sin(\phi)) = r \exp(i\phi) \quad (1.39)$$

Theorem 5.3: Potenzgesetze

Für die Exponentialfunktion gelten die folgenden Rechenregeln:

- $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$
- $\exp(-x) = 1 / \exp(x)$
- $\exp(x)^\alpha = \exp(\alpha x)$

Theorem 5.4: Symmetrie von Sinus und Kosinus

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad (1.40)$$

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad (1.41)$$

Beweis.

Übungsaufgabe.

Aus dieser Aussage folgt außerdem die Eigenschaft $\exp(-ix) = \cos(x) - i \sin(x)$.

Theorem 5.5: Darstellung von Sinus und Cosinus mittels der Exponentialfunktion

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (1.42)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (1.43)$$

Beweis.

| Übungsaufgabe. ■

Theorem 5.6: Additionstheoreme

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \quad (1.44)$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \quad (1.45)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1.46)$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \quad (1.47)$$

Beweis.

| Übungsaufgabe. ■

KAPITEL 2

DIFFERENTIALRECHNUNG

1 Die Ableitung

Definition 1.1: Differenzenquotient

Sei f eine beliebige Funktion. Der Differenzenquotient an den Punkten $x \neq y$ ist definiert durch

$$\Delta f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}. \quad (2.1)$$

Anschaulich gesprochen ist der Differenzenquotient die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$.

Definition 1.2: Differentialquotient

Sei f eine beliebige Funktion. Der Differentialquotient am Punkt x ist (so fern er existiert) definiert durch

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (2.2)$$

Anschaulich gesprochen ist der Differentialquotient die Steigung der Tangente am Punkt $(x, f(x))$.

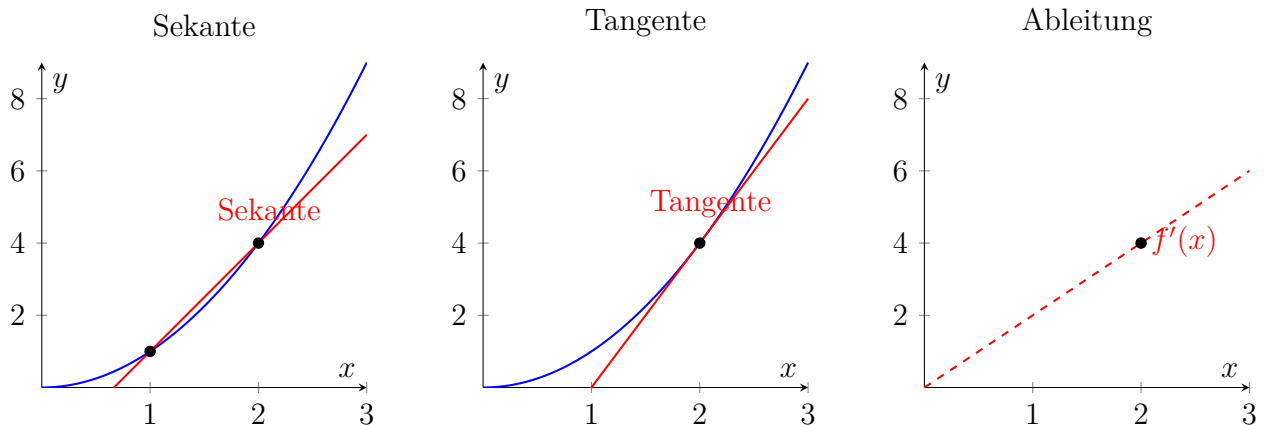


Abbildung 2.1: In der linken Abbildung ist eine Funktion f und die Tangente durch die Punkte bei $x = 1$ und $x = 2$ abgebildet. Die Steigung der Sekante entspricht hierbei $\Delta f(1, 2)$. In der mittleren Abbildung findet sich die gleiche Funktion mit der Tangente bei $x = 2$. Die Steigung der Tangente entspricht $f'(2)$, also dem Funktionswert der Ableitung bei $x = 2$. Sprich, die abgebildete Tangente hat Steigung 4 und es gilt $f'(2) = 4$.

Definition 1.3: Ableitung

Sei f eine beliebige Funktion, bei der für alle x der Differentialquotient definiert ist. Das heißt f *differenzierbar* und die Funktion

$$f'(x) = \frac{df}{dx} \quad (2.3)$$

heißt Ableitung von f .

Die Namen f und x sind natürlich beliebig gewählt. Ist x die Zeit schreibt man auch gerne t und für Orte s , x oder y .

Wenn $s(t)$ jetzt die zurückgelegte Strecke zu einer Zeit t angibt, ist $s'(t)$ die Geschwindigkeit (häufig $v(t)$ genannt) und $s''(t) = v'(t)$ ist die Beschleunigung (häufig $a(t)$ genannt).

2 Rechenregeln für Ableitungen

Theorem 2.1: Ableitung von Monomen

Ein Monom ist eine Funktion der Form

$$f(x) = x^n \quad (2.4)$$

für eine natürliche Zahl n , die man auch den *Grad* des Monoms nennt. Die Ableitung des Monoms ist dann gegeben durch

$$f'(x) = nx^{n-1}. \quad (2.5)$$

Beweis.

Wir fangen an, indem wir uns den Ausdruck $(a+b)^n$ anschauen. Wenn wir diesen Ausdruck ausmultiplizieren, erhalten wir eine lange Summe. Der erste Summand ist hierbei a^n , also aus jedem der n Faktoren nehmen wir das a . Nun kann man für jeden der n Faktoren einmal statt eines a s ein b nehmen, das ergibt $na^{n-1}b$. Alle anderen Summanden haben mindestens eine zweite Potenz in b . Also folgt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + (\dots)b^2 + (\dots)b^3 + \dots + (\dots)b^n \quad (2.6)$$

Zur Vollendung des Beweises setzen wir $a = x$ und $b = h$:

$$\begin{aligned} \frac{dx^n}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + (\dots)h^2 + (\dots)h^3 + \dots + (\dots)h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + (\dots)h^2 + (\dots)h^3 + \dots + (\dots)h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + (\dots)h^2 + (\dots)h^3 + \dots + (\dots)h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} nx^{n-1} + (\dots)h + (\dots)h^2 + \dots + (\dots)h^{n-1} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Im folgenden gucken wir uns an, was mit der Ableitung einer Funktion passiert, wenn sie mit einer Konstanten addiert bzw. multipliziert.

Theorem 2.2: Konstanten beim Ableiten

Sei $f(x)$ eine Funktion mit Ableitung $f'(x)$ und c eine Konstante.

- Sei $g(x) = f(x) + c$, dann gilt $g'(x) = f'(x)$.
- Sei $h(x) = cf(x)$, dann gilt $h'(x) = cf'(x)$.
- Sei $j(x) = f(cx)$, dann gilt $j'(x) = cf'(cx)$.
- Sei $k(x) = c$, dann gilt $k'(x) = 0$.

Beweis.

Übungsaufgabe. ■

Theorem 2.3: Summenregel

Seien f und g zwei Funktionen mit Ableitungen f' und g' . Dann gilt:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (2.8)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

Theorem 2.4: Produkt- und Quotientenregel

Für zwei Funktionen f und g mit den Ableitungen f' und g' gilt:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (2.9)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (2.10)$$

Theorem 2.5: Ableitung von Sinus- Cosinus- und Exponentialfunktion

$$\sin'(x) = \cos(x) \quad (2.11)$$

$$\cos'(x) = -\sin(x) \quad (2.12)$$

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad (2.13)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin(x) &= \frac{d}{dx} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{d}{dx} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{\frac{d}{dx} x^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(2i+1)x^{2i}}{(2i+1)!} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \\ &= \cos(x) \end{aligned}$$

Rest: Übungsaufgabe. ■

Definition 2.6: Höhere Ableitungen

Für die Ableitung der Ableitung von f schreibt man oft

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} f(x). \quad (2.14)$$

Wenn man n -mal ableitet schreibt man

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x). \quad (2.15)$$

■ *Beispiel :*

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} \exp(ikx) &= \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \exp(ikx) \\ &= \frac{d}{dx} ik \exp(ikx) \\ &= ikik \exp(ikx) \\ &= -k^2 \exp(ikx)\end{aligned}$$

KAPITEL 3

VEKTORRECHNUNG

1 Motivation

Wir erinnern uns an die komplexen Zahlen, zum Beispiel $z = 1 - i$. Diese Zahl hat einen Realteil $x = 1$ und einen Imaginärteil $y = -1$. Man könnte diese Zahl also auch darstellen als

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Andererseits wissen wir auch, dass z in Polarkoordinaten durch einen Pfeil dargestellt werden kann, der von der 0 nach z zeigt. Dieser Pfeil hat eine Länge und eine Richtung. Allgemein kann man also sagen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

stellt einen Pfeil dar, der vom Ursprung aus gesehen auf den Punkt mit den Koordinaten (v_x, v_y) zeigt.

2 Der Vektorraum \mathbb{R}^3

Definition 2.1: Vektor im \mathbb{R}^3

Ein Vektor \vec{v} im Raum ist ein Tupel von drei Zahlen x, y und $z \in \mathbb{R}$, das in der folgenden Weise notiert wird:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Anschaulich ist ein Vektor ein Pfeil, der von einem Punkt $p = (a, b, c)$ im Koordinatensystem zu einem Punkt $q = (a + x, b + y, c + z)$ zeigt.

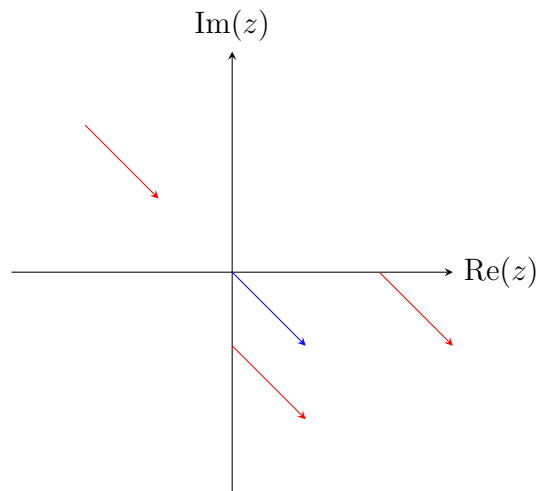


Abbildung 3.1: Der blaue Pfeil verbindet den Ursprung mit dem Punkt mit dem Koordinaten $(1, -1)$, aber der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist unabhängig vom Startpunkt, es geht nur um die Länge und die Richtung des Pfeils.

Definition 2.2: Addition von Vektoren

Gegeben seien zwei Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Die Summe der zwei Vektoren ist definiert durch

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Anschaulich ist das die Hintereinanderausführung der beiden Verschiebungen durch die Vektoren v_1 und v_2 (siehe Abbildung 3.2).

Definition 2.3: Skalarmultiplikation

Gegeben sei ein Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

und ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Skalarmultiplikation von \vec{v} mit λ ist definiert durch

$$\lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Der resultierende Vektor ist parallel zu \vec{v} , allerdings wird seine Länge mit λ skaliert. Ist $\lambda < 0$, so zeigt λv in die entgegengesetzte Richtung zu v (siehe Abbildung 3.2).

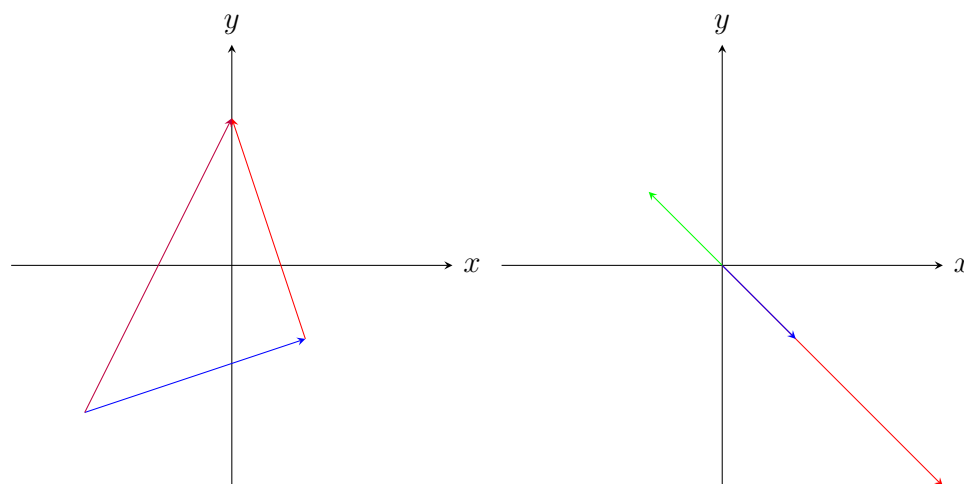


Abbildung 3.2: Links: Der blaue Pfeil stellt den Vektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar, der rote den Vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Die Summe der beiden ist der lilane Pfeil $\begin{pmatrix} 3-1 \\ 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Da Vektoren nur die relativen Verschiebungen (Pfeile) beschreiben, ist der Startpunkt (hier unten links) beliebig.

Rechts: Der blaue Pfeil repräsentiert den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Der rote Pfeil entspricht $3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$, während der grüne Pfeil $-\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in die entgegengesetzte Richtung zeigt.

Definition 2.4: Vektorraum

Ein Vektorraum ist eine Menge an Elementen $\{\vec{v}\}$, die Vektoren genannt werden. Vektoren dürfen addiert und mit einer reellen (oder komplexen) Zahl multipliziert werden. Die hier benutzten Räume \mathbb{R}^3 und \mathbb{R}^2 sind Beispiele für Vektorräume, aber auch die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum.

3 Spezielle Vektoroperationen im \mathbb{R}^3

Definition 3.1: Betrag eines Vektors

Die Länge eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ kann nach dem Satz des Pythagoras bestimmt werden durch

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (3.7)$$

Beispiel : Länge eines Vektors

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}. \quad (3.8)$$

Definition 3.2: Skalarprodukt

Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren im Vektorraum \mathbb{R}^3 . Das Skalarprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist definiert als:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (3.9)$$

Theorem 3.3: Geometrische Interpretation des Skalarprodukt

Wenn ϕ der Winkel ist, der von den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} eingeschlossen ist, dann gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \phi \quad (3.10)$$

Insbesondere bedeutet $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dass \vec{a} senkrecht zu \vec{b} ist.

Beispiel : Winkel zwischen zwei Vektoren

Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Wir berechnen den Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} .

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \phi \\ 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 &= \sqrt{2} \sqrt{1} \cos \phi \\ \cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \phi &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Definition 3.4: Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt von \vec{a} und \vec{b} ist definiert durch:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Theorem 3.5: Eigenschaften vom Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt hat folgende Eigenschaften:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times \vec{b}$ ist senkrecht auf den Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Das heißt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0.$$

- $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \phi$

