Teil I

Mathematische Grundlagen

KAPITEL 1

KOMPLEXE ZAHLEN

1 Quadratische Gleichungen

Um an einem Punkt zu starten, mit dem alle Schüler der Oberstufe vertraut sein sollten, beginnen wir mit einer kurzen Wiederholung zu quadratischen Gleichungen.

Definition 1.1: Quadratische Funktion

- Eine quadratische Funktion f bildet eine reelle Zahl x auf eine andere reelle Zahl $f(x)$ ab, gemäß der Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \tag{1.1}$$

  wobei a_0, a_1 und a_2 beliebige aber feste reelle Zahlen sind, mit der Einschränkung $a_2 \neq 0$.

- Die Gleichung

$$f(x_0) = 0 \tag{1.2}$$

  mit einer quadratischen Funktion f heißt *quadratische Gleichung*. x_0 nennt man auch die Nullstelle von f.

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass man f mit einer beliebigen Konstante $c \neq 0$ multiplizieren kann und dies die Nullstellen nicht verändert. Es ist häufig zweckmäßig $c = \frac{1}{a_2}$ zu wählen. Die Funktion cf nimmt dann die Form

$$cf(x) = \frac{1}{a_2} f(x) = x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} =: x^2 + px + q \tag{1.3}$$

an. Mit dieser Darstellung lässt sich dann folgendes Theorem leicht beweisen.

Theorem 1.2: $p-q$**-Formel**

Sei f eine quadratische Funktion.

- Wenn $4q > p^2$, hat f *keine* Nullstelle.
- Wenn $4q = p^2$, hat f *eine* Nullstelle, die gegeben ist durch

$$x_0 = -\frac{p}{2}. \tag{1.4}$$

- Wenn $4q < p^2$, hat f *zwei* Nullstellen, die gegeben sind durch

$$x_0^a = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \tag{1.5}$$

$$x_0^b = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \tag{1.6}$$

Beweis.

Übungsaufgabe. ■

Beispiel : Einfache quadratische Gleichungen

- $$f(x) = x^2 - 1$$

  Da $p = 0$ und $q = -1$ gilt, trifft der dritte Fall zu und die Nullstellen sind 1 und -1.

- $$f(x) = x^2$$

  Da $p = 0$ und $q = 0$ gilt, trifft der zweite Fall zu und die Nullstellen ist 0.

- $$f(x) = x^2 + 1$$

  Da $p = 0$ und $q = 1$ gilt, trifft der ertse Fall zu es gibt keine Lösung.

■

2 Die imaginäre Einheit i und die komplexe Zahlenebene

Es ist zweckmäßig nun eine neue Zahl i zu definieren, die eine Nullstelle von $f(x) = x^2 + 1$ ist. Es gilt also

$$\mathrm{i}^2 = -1 \tag{1.7}$$

und man kann direkt nachrechnen, dass $-\mathrm{i}$ dieselbe Eigenschaft hat. Beide Zahlen i und $-\mathrm{i}$ sind offensichtlich keine reellen Zahlen und deswegen kann man sie auch nicht auf dem Zahlenstrahl finden. Wir lösen dieses Problem, indem der Zahlenstrahl um eine senkrechte Achse erweitert wird, auf der wir i und $-\mathrm{i}$ finden. Veranschaulicht wird dies auf der linken Seite in Abbildung 1.1.
Durch das Verwenden der gesamten Ebene lassen sich nun auch Summen von reellen Zahlen mit imaginären Zahlen definieren. Wie man auf der rechten Seite von Abbildung 1.1 sehen kann, befindet sich der Zahlenwert $2+\mathrm{i}$ bei den Koordinaten $(2, 1)$ und der Zahlenwert $-3-2\mathrm{i}$ bei $(-2, -3)$, bzw. hat $z = x + \mathrm{i}y$ im allgemeinen die Koordinaten (x, y)[1].
Insbesondere gilt nun mit den komplexen Zahlen, dass alle quadratischen Gleichungen ein oder zwei Lösungen haben. Um Beispielsweise die Gleichung $x^2 = \mathrm{i}$ zu lösen, braucht man keine zusätzliche Erweiterung des Zahlenraums. Auch die Gleichung

$$x^2 = -n \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.8}$$

ist nun vollständig lösbar durch $x = \pm\mathrm{i}\sqrt{n}$. Viele nennen i auch die Wurzel aus -1, das ist aber nicht ganz korrekt, da es zu Widersprüchen führen kann wie im folgenden Beispiel:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = \sqrt{(-1)}^2 = i^2 = -1 \tag{1.9}$$

Definition 2.1: Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl

Sei $z = x+\mathrm{i}y$ eine komplexe Zahl. Dann heißt x der Realteil und y der Imaginärteil von z. Für den Realteil schreibt man auch häufig $\mathrm{Re}(z)$ und für den Imaginärteil $\mathrm{Im}(z)$:

3 Rechnen mit komplexen Zahlen

Natürlich wollen wir mit komplexen Zahl genauso rechnen können, wie wir es mit reellen Zahlen gewohnt sind. Dafür definieren wir nun die Rechenvorschriften.

[1] Statt $x + \mathrm{i}y$ kann man auch $x + y\mathrm{i}$ schreiben.

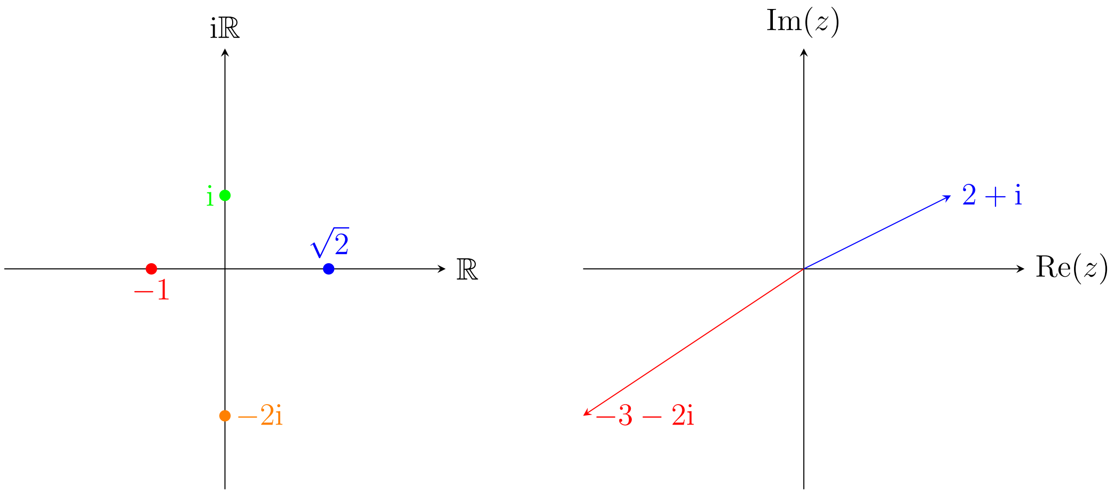

Abbildung 1.1: Auf der rechten Seite der Abbildung sehen wir die imaginäre Achse, die senkrecht auf der reelle Achse steht. Beide Achsen spannen zusammen die komplexe Ebene auf (rechte Seite), auf der wir alle komplexen Zahlen $z = x + iy$ finden.

Definition 3.1: Rechenregeln für komplexe Zahlen

Seien $z = x + \mathrm{i}y$ und $z' = x' + \mathrm{i}y'$ zwei beliebige aber feste komplexe Zahlen. Dann definieren wir die folgenden Rechenoperationen:

- Addition

$$z + z' = (x + \mathrm{i}y) + (x' + \mathrm{i}y') = (x + x') + \mathrm{i}(y + y') \tag{1.10}$$

- Subtraktion

$$z - z' = (x + \mathrm{i}y) - (x' + \mathrm{i}y') = (x - x') + \mathrm{i}(y - y') \tag{1.11}$$

- Multiplikation

$$z \cdot z' = (x + \mathrm{i}y) \cdot (x' + \mathrm{i}y') = (x \cdot x' - y \cdot y') + \mathrm{i}(x \cdot y' + y \cdot x') \tag{1.12}$$

- Konjugation

$$z^* = x - \mathrm{i}y \tag{1.13}$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln.

Theorem 3.2: Rechenregeln für komplexe Zahlen

Seien z, z' und z'' komplexe Zahlen. Dann gilt:

- Kommutativität

$$z \cdot z' = z' \cdot z \tag{1.14}$$
$$z + z' = z' + z \tag{1.15}$$

- Distributivität

$$z \cdot (z' + z'') = z \cdot z' + z \cdot z'' \tag{1.16}$$

- Assoziativität

$$z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z'' \tag{1.17}$$
$$z + (z' + z'') = (z + z') + z'' \tag{1.18}$$

Zur Veranschaulichung folgt ein Beispiel.

Beispiel : Rechnen mit komplexen Zahlen
Sei $z = 2 + \mathrm{i}$ und $z' = 3 + 2\mathrm{i}$.

$$z + z' = (2 + 3) + (1 + 2)\mathrm{i} = 5 + 3\mathrm{i} \tag{1.19}$$
$$z - z' = (2 - 3) + (1 - 2)\mathrm{i} = -1 - \mathrm{i} \tag{1.20}$$
$$z \cdot z' = (2 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + (2 \cdot 2 + 1 \cdot 3)\mathrm{i} = 4 + 7\mathrm{i} \tag{1.21}$$
$$z^* = 2 - \mathrm{i} \tag{1.22}$$

Wie vielleicht schon aufgefallen ist, fehlt hier die Division. Dafür braucht es ein klein wenig Vorarbeit. Wir gucken uns dafür an, was passiert ein Element mit seinem Konjugierten multipliziert wird.

Definition 3.3: Betragsquadrat

$$z \cdot z^* = (x + \mathrm{i}y) \cdot (x - \mathrm{i}y) = (x^2 + y^2) + 0\mathrm{i} = x^2 + y^2 \tag{1.23}$$

Das Ergebnis ist also eine rein reelle Zahl, die häufig $|z|^2$ genannt wird. Nun können wir beide Seiten der Gleichung durch $|z|^2$ und durch z teilen und erhalten:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2} \tag{1.24}$$

Damit lässt sich nun die Division von komplexen Zahlen definieren.

Definition 3.4: Division komplexer Zahlen

$$\frac{z'}{z} = z' \cdot \frac{1}{z} = \frac{z' z^*}{|z|^2} \tag{1.25}$$

Beispiel : Division komplexer Zahlen
Sei $z = 2 + \mathrm{i}$ und $z' = 3 + 2\mathrm{i}$.

$$\frac{z}{z'} = \frac{(2+\mathrm{i})(3-2\mathrm{i})}{3^2+2^2} = \frac{8-\mathrm{i}}{13} = \frac{8}{13} - \frac{1}{13}\mathrm{i} \tag{1.26}$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{(2-\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{1^2+2^2} = \frac{8+\mathrm{i}}{5} = \frac{8}{5} + \frac{1}{5}\mathrm{i} \tag{1.27}$$

4 Polarkoordinaten

Eine komplexe Zahl kann nicht nur über ihren Real- und Imaginärteil definiert werden[2], sondern auch über Ihren Abstand zum Ursprung (Betrag) und den Winkel, den die Ursprungsgrade und die reelle Achse einschließen (Argument). Hier ist drauf zu achten, dass in der Physik (und in der Mathematik) Winkel im Bogenmaß statt im Gradmaß angegeben werden. Um Gradmaß in Bogenmaß umzurechnen multipliziert man mit $\frac{\pi}{180°}$. Um Bogenmaß in Gradmaß umzurechnen multipliziert man mit $\frac{180°}{\pi}$. In Abbildung 1.2 wird die Polardarstellung komplexer Zahlen visualisiert.

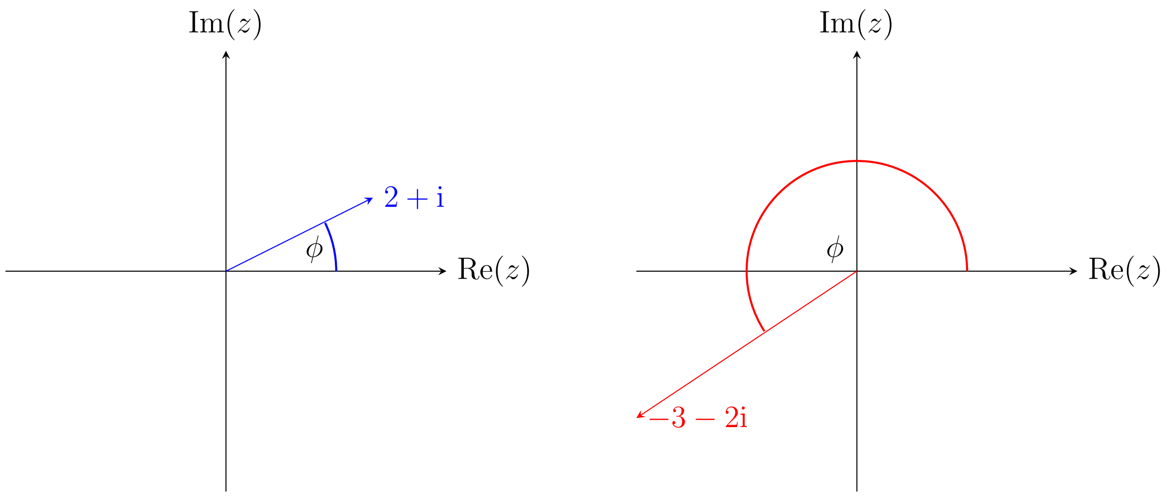

Abbildung 1.2: Veranschulichung zweier komplexer Zahlen in Polarkoordinaten. Die Länge des Pfeils entspricht dem Betrag $|z|$ und der vom Bogen eingeschlossene Winkel entspricht dem Argument ϕ

[2]Dies nennt man auch kartesische Darstellung.

Theorem 4.1: Wechsel zwischen den Koordinaten

Sei z eine komplexe Zahl mit Realteil x, Imainärteil y, Betrag r und Argument ϕ.

- Um Polarkoordinaten in kartesiche Koordinaten umzurechnen, benutzt man die Formeln:

$$x = r\cos\phi \quad y = r\sin\phi \tag{1.28}$$

- Die Umrechnung von kartesischen in Polarkoordinaten ist etwas umständlicher.

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \phi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases} \tag{1.29}$$

Wenn $x = 0 = y$ vorliegt, ist das Argument nicht definiert.

An dieser Stelle sei gesagt, dass die Darstellung in Polarkoordinaten nicht eindeutig ist. ϕ und $\phi + 2\pi n$ für ganze Zahlen n stellen dieselbe Zahl da. Meistens wählt man ϕ dann im Intervall $(-\pi, \pi]$. Für die schnelle Berechnung von Sinus- und Kosinuswerten kann folgende Tabelle helfen:

ϕ [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ϕ [°]	0	30	45	60	90
$\sin\phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
$\cos\phi$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Tabelle 1.1: Tabelle zur schnellen Bestimmung von Werten des Sinus und Cosinus

Beispiel : Wechsel zwischen den Koordinaten

- Sei $z = -1 + \mathrm{i}$. Dann sind Betrag und Argument gegeben durch

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \tag{1.30}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) + \pi = -\frac{1}{4}\pi + \pi = \frac{3\pi}{4} \tag{1.31}$$

- Sei $r = 2$ und $\phi = \frac{\pi}{3}$. Dann sind Real- und Imaginärteil gegeben durch

$$x = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2\frac{1}{2} = 1, \tag{1.32}$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}. \tag{1.33}$$

5 Spezielle Funktionen I

Im folgenden Kapitel werden Sinus und Kosinus als Funktionen untersucht und es wird die (komplexe) Exponentialfunktion eingeführt.

Definition 5.1: Sinus, Kosinus und Exponentialfunktion

- Der Sinus (im Bogenmaß) ist definiert als

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - ... \tag{1.34}$$

- Der Cosinus (im Bogenmaß) ist definiert als

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - ... \tag{1.35}$$

- Die Exponentialfunktion ist definiert als

$$e^x = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + ... \tag{1.36}$$

Theorem 5.2: Die Eulersche Identität

$$\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) \tag{1.37}$$

Insbesondere gilt für $x = \pi$:

$$e^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0 \tag{1.38}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{i}x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}x)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}(-)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)
\end{aligned}$$

■

Man kann nun komplexe Zahlen in Polardarstellung wesentlich effizienter schreiben:

$$z = x + \mathrm{i}y = r\cos(\phi) + r\sin(\phi)\mathrm{i} = r(\cos(\psi + \mathrm{i}\sin(\phi)) = r\exp(i\phi) \tag{1.39}$$

Theorem 5.3: Potenzgesetzte

Für die Exponentialfunktion gelten die folgenden Rechenregeln:

- $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$
- $\exp(-x) = 1/\exp(x)$
- $\exp(x)^\alpha = \exp(\alpha x)$

Theorem 5.4: Symmetrie von Sinus und Kosinus

$$\sin(-x) = -\sin(x) \tag{1.40}$$
$$\cos(-x) = \cos(x) \tag{1.41}$$

Beweis.

Übungsaufgabe. ■

Aus dieser Aussage folgt außerdem die EIgenschaft $\exp(-\mathrm{i}x) = \cos(x) - \mathrm{i}\sin(x)$.

Theorem 5.5: Darstellung von Sinus und Cosinus mittels der Exponentialfunktion

$$\sin(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2i} \tag{1.42}$$

$$\cos(x) = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2} \tag{1.43}$$

Beweis.

Übungsaufgabe. ■

Theorem 5.6: Additionstheoreme

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(y)\sin(x) \tag{1.44}$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \tag{1.45}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1.46}$$

$$1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} \tag{1.47}$$

Beweis.

Übungsaufgabe. ■

KAPITEL 2

DIFFERENTIALRECHNUNG

1 Die Ableitung

Definition 1.1: Differenzenquotient

Sei f eine beliebige Funktion. Der Differenzenquotient an den Punkten $x \neq y$ ist definiert durch

$$\Delta f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}. \tag{2.1}$$

Anschaulich gesprochen ist der Differenzenquotient die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$.

Definition 1.2: Differentialquotient

Sei f eine beliebige Funktion. Der Differentialquotient am Punkt x ist (so fern er existiert) definiert durch

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}. \tag{2.2}$$

Anschaulich gesprochen ist der Differentialquotient die Steigung der Tangente am Punkt $(x, f(x))$.

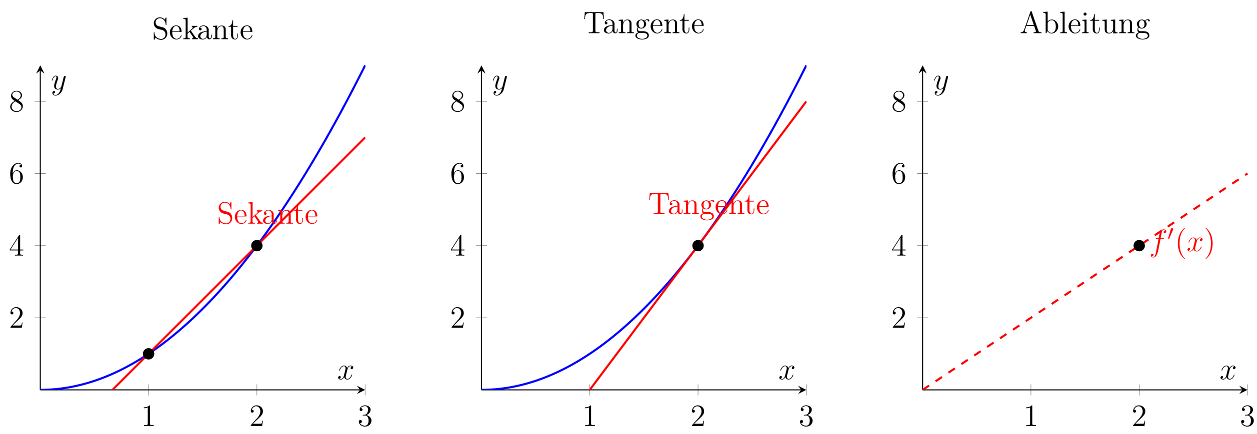

Abbildung 2.1: In der linken Abbildung ist eine Funktion f und die Tangente durch die Punkte bei $x = 1$ und $x = 2$ abgebildet. Die Steigung der Sekante entspricht hierbei $\Delta f(1, 2)$. In der mittleren Abbildung findet sich die gleiche Funktion mit der Tangente bei $x = 2$. Die Steigung der Tangente entspricht $f'(2)$, also dem Funktionswert der Ableitung bei $x = 2$. Sprich, die abgebildete Tangente hat Steigung 4 und es gilt $f'(2) = 4$.

Definition 1.3: Ableitung

Sei f eine beliebige Funktion, bei der für alle x der Differentialquotient definiert ist. Das heißt f *differenzierbar* und die Funktion

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \tag{2.3}$$

heißt Ableitung von f.

Die Namen f und x sind natürlich beliebig gewählt. Ist x die Zeit schreibt man auch gerne t und für Orte s, x oder y.
Wenn $s(t)$ jetzt die zurückgelegte Strecke zu einer Zeit t angibt, ist $s'(t)$ die Geschwindigkeit (häufig $v(t)$ genannt) und $s''(t) = v'(t)$ ist die Beschleunigung (häufig $a(t)$ genannt).

2 Rechenregeln für Ableitungen

Theorem 2.1: Ableitung von Monomen

Ein Monom ist eine Funktion der Form

$$f(x) = x^n \tag{2.4}$$

für eine natürliche Zahl n, die man auch den *Grad* des Monoms nennt. Die Ableitung des Monoms ist dann gegeben durch

$$f'(x) = nx^{n-1}. \tag{2.5}$$

Beweis.

Wir fangen an, indem wir uns den Ausdruck $(a+b)^n$ anschauen. Wenn wir diesen Ausdruck ausmultiplizieren, erhalten wir eine lange Summe. Der erste Summand ist hierbei a^n, also aus jedem der n Faktoren nehmen wir das a. Nun kann man für jeden der n Faktoren einmal statt eines as ein b nehmen, das ergibt $na^{n-1}b$. Alle anderen Summanden haben mindestens eine zweite Potenz in b. Also folgt:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + (...)b^2 + (...)b^3 + ... + (...)b^n \tag{2.6}$$

Zur Vollendung des Beweises setzen wir $a = x$ und $b = h$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + (...)h^2 + (...)h^3 + ... + (...)h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + (...)h^2 + (...)h^3 + ... + (...)h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + (...)h^2 + (...)h^3 + ... + (...)h^n}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} nx^{n-1} + (...)h + (...)h^2 + ... + (...)h^{n-1} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

■

Im folgenden gucken wir uns an, was mit der Ableitung einer Funktion passiert, wenn sie mit einer Konstanten addiert bzw. multipliziert.

Theorem 2.2: Konstanten beim Ableiten

Sei $f(x)$ eine Funktion mit Ableitung $f'(x)$ und c eine Konstante.

- Sei $g(x) = f(x) + c$, dann gilt $g'(x) = f'(x)$.
- Sei $h(x) = cf(x)$, dann gilt $h'(x) = cf'(x)$.
- Sei $j(x) = f(cx)$, dann gilt $j'(x) = cf'(cx)$.
- Sei $k(x) = c$, dann gilt $k'(x) = 0$.

Beweis.

Übungsaufgabe. ■

Theorem 2.3: Summenregel

Seien f und g zwei Funktionen mit Ableitungen f' und g'. Dann gilt:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) \tag{2.8}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

■

Theorem 2.4: Produkt- und Quotientenregel

Für zwei Funktionen f und g mit den Ableitungen f' und g' gilt:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g(x)'}{g(x)^2} \tag{2.10}$$

Theorem 2.5: Ableitung von Sinus- Cosinus- und Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}
\sin'(x) &= \cos(x) && (2.11)\\
\cos'(x) &= -\sin(x) && (2.12)\\
\exp'(x) &= \exp(x) && (2.13)
\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{i=0\infty}(-)^n\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-)^n\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(-)^n\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{2i+1}}{(2i+1)!}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(-)^n\frac{(2i+1)x^{2i}}{(2i+1)!}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}(-)^n\frac{x^{2i}}{(2i)!}\\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Rest: Übungsaufgabe. ■

Definition 2.6: Höhere Ableitungen

Für die Ableitung der Ableitung von f schreibt man oft

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f(x). \tag{2.14}$$

Wenn man n-mal ableitet schreibt man

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^n}f(x). \tag{2.15}$$

Beispiel :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\exp(\mathrm{i}kx) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(\mathrm{i}kx)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{i}k\exp(\mathrm{i}kx)\\ &= \mathrm{i}k\mathrm{i}k\exp(\mathrm{i}kx)\\ &= -k^2\exp(\mathrm{i}kx)\end{aligned}$$