

V1 Wahrscheinlichkeit in der Physik

1) Wahrscheinlichkeit in der Physik
(Themen der Physik im Bachelor-Studium)

TP1 Mechanik

TP2 Elektrodynamik

TP3 Quantenmechanik

→ TP4: Statistische Physik //

- Das Verhalten vieler Teilchen (meist als hundert) können wir nicht ohne statistische Methoden verstehen.
- Makroskopische Materie besteht aus einem vielen Teilchen
(wie wir leben und atmen können)

$$N_L \sim 6 \cdot 10^{23} \quad \text{Loschmidt-Zahl}$$

= Anzahl der Atome in einem Mol Materie

= +ix für probabilische Zurechnung & Stat. Phys. nötig
kollektive

- Im mikroskopischen Fall wollen wir das Verhalten sehr vieler gleicher Teilchen (z.B. Atome oder Moleküle) verstehen.

Viele Wassermoleküle z.B. sehen wir als Eis, als Wasser oder als Wasserdampf. Existenz und Koexistenz dieser "Phasen" hängen von äußeren Größen wie Druck p oder Temperatur T ab, die selbst makroskopisch sind und nicht ~~aber~~ Eigenschaften der Wassermoleküle ~~bestimmen~~. Sie sind vielmehr statistisch begründbar. //

- Die Beziehungen zwischen Größen wie T, p und Volumen V , die wir einander abhängig sind, sind gesam der Thermodynamik gründet auf Statistik. ①

(auch ~~statistische~~ Methoden eigenständig zur Zeit-
festlegung, Zählzeiten etc. können mit
Methoden der statistischen Physik behandelt werden)

2) Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen

- In der Physik sind Wahrscheinlichkeiten
unverzichtbar als relativer Häufigkeiten. Bei un-
gezielten Präparaturen des Experiments (Würfel-
brems schütteln) können verschiedene
Messwerte (mit Nummer n) beobachtet
werden

$$P_n = \frac{\text{Häufigkeit von Messwert } n}{\text{Gesamtzahl der Messungen } N}$$

(Statistik setzt sich bei vielen Wiederholungen)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad 0 \leq P_n \leq 1 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(diskret)} \\ \text{(Wahrscheinlichkeits-} \\ \text{verteilung)} \end{array} \right. \\ \sum_{n=1}^N P_n = 1 & \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Wahrscheinlichkeit} \\ \text{für Messwert } n \end{array} \right. \end{aligned}$$

P_n = Wert von p für Messwert Nummer n

X_n = Messwert n der Größe X

$$\langle X \rangle = \sum_{n=1}^N P_n X_n \quad \text{Mittelwert von } X$$

$$\langle F(X) \rangle = \sum_{n=1}^N P_n F(X_n) \quad \text{Mittelwert von } F(X)$$

$$\Delta X = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle}$$

$$= \langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2$$

Varianz, misst Schwankung
des Werts von X

3) Übergang aus Ordnung und Ordnung aus Unordnung

(i) Kann man mit einem Würfelschaber mit z.B. 6 Würfeln so oft man will immer den gleichen Wurf erzielen? Wenn man die Würfel immer gleich in den Behälter legt? Und wenn man immer gleich schüttelt? Wenn man einen Roboter benutzt, der das viel genauer als ein Mensch wiederholen kann?

Nein? Warum ist das so?

Deterministische Dynamik - Newtons

Bewegungsgleichungen können zu

"zufälliger Bewegung" führen"

→ Abhängigkeit von Anfangsbedingungen, Wechselbarkeit, Vorhersagbarkeit, deterministisches Chaos

(ii) Wir nehmen sehr viele Würfel und schauen die mittlere Augenzahl und deren Varianz an.

$A_n = n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ Augenzahl

$p_n = \frac{1}{6}$

Wahrscheinlichkeit

1 Würfel:

$$\langle A \rangle = \sum_{n=1}^6 p_n A_n = \frac{1}{6} (1+2+\dots+6) = \frac{1}{6} \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}$$

m Würfel:

$$\langle A_1 + \dots + A_m \rangle = \sum_{A_1, \dots, A_m=1}^6 (A_1 + \dots + A_m) p_{A_1} \dots p_{A_m} = m \cdot \frac{7}{2}$$

$$\langle (A_1 + \dots + A_m)^2 \rangle = \sum_{A_1, \dots, A_m=1}^6 (A_1 + \dots + A_m)^2 P_{A_1} \dots P_{A_m}$$

$$= \sum_{A_1, \dots, A_m=1}^6 \left(A_1^2 + \dots + A_m^2 + 2(A_1 A_2 + \dots + A_{m-1} A_m) \right) P_{A_1} \dots P_{A_m}$$

$\frac{m(m-1)}{2}$ Terme
(= Anzahl Paare)

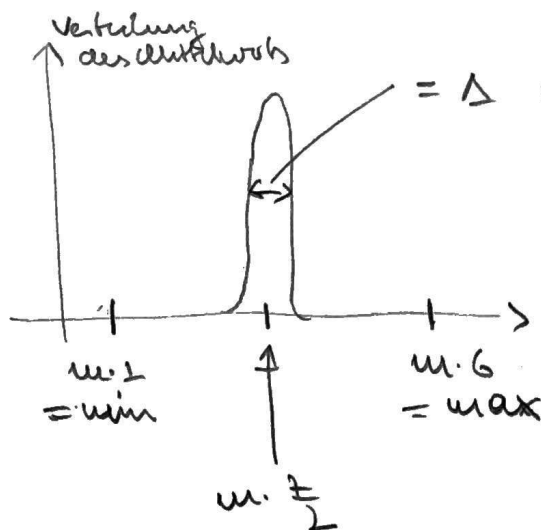
$$= m(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) + 2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$\stackrel{!}{=} 91 = 13 \cdot 7$

$$= \left(m \cdot \frac{7}{2} \right)^2 + m \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{13 \cdot 4 - 7}{2} = 45 = 5 \cdot 9$$

$$\Rightarrow \Delta(A_1 + \dots + A_m) = \sqrt{m} \cdot \frac{\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 9}}{2}$$

Wie ist der Mittelwert der gesamtangewandten Zeit verteilt?



= Δ mittlerer Schwankung
 $\sim \sqrt{m}$

wird „klein“ auf Skalen m^4

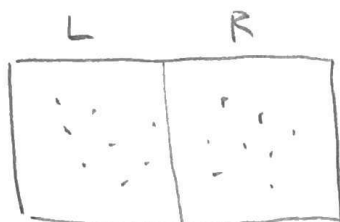
z.B. $m = 10000$

$\Rightarrow \sqrt{m} = 100$

Faktor 100 kleiner!

Fazit: Deterministische Bewegung kann zufällig aussehen — zufällige Bewegung kann deterministisch aussehen

Dies kann werden wir auf Systeme vieler Teilchen anwenden z.B. auf ein Gas.



gas im Behälter

Welche Gaspartikel sind in Mitte in der linken Hälfte des Behälters, welche in der rechten?

$A_n = 0,1$ Beitrag von Teilchen n zur Teilchenzahl links

$$p_n = \frac{1}{2}$$

Berechnung wie oben:

$$\langle A_1 + \dots + A_m \rangle = \frac{m}{2}, \quad \langle (A_1 + \dots + A_m)^2 \rangle = \frac{m^2}{4} + \frac{m}{4}$$

$$\Delta(A_1 + \dots + A_m) = \sqrt{\frac{m}{4}}$$

$$m = 6 \cdot 10^{23} \sim 10^{24} \Rightarrow \sqrt{m} \sim 10^{12}$$

relativer Schwankung der Teilchenzahl links $\sim 10^{-12}$
 $\Rightarrow$ (SEHR) klein. "Gesetz der großen Zahlen"

V2) Entropie und Information

1) Informationswkt.

$$X \in \mathbb{R}_+$$

$$X = 10^{\log(X)} = e^{\ln(X)} = 2^{\log_2(X)}$$

verschiedene Logarithmen. Die Zehnerlogarithmen "log" liegen dem Dezimalsystem zugrunde, die Zweierlogarithmen "ld" dem Dual- oder Binärsystem.

• im Dezimalsystem z.B.:

$$1 < \log X < 2 \Rightarrow 10 < X < 100$$

$[x]$ = ganzzahliger Anteil von x hat dann
 zwei = $\lceil \log(x) \rceil + 1$ Dezimalstellen, z.B.

$$37 = \underline{3} \cdot 10 + \underline{7} \cdot 1$$

- im Dualsystem ($(\ln(x)/\ln(2) = \lg(x))$)

$$\lg(37) = 5,20845..$$

$$\lceil \lg(37) \rceil + 1 = 6,$$

$$37 = 32 + 4 + 1 = 2^5 + 2^2 + 2^0$$

→ 100101 6-stellige Dualzahl

6 Bits werden benötigt, um 37 als Dualzahl zu kodieren (← Speicherplatz!).

$\lg(x)$ heißt Informationswert von x ($x \geq 1$)

„Wieviele Ja-Umfrage-Fragen muss ich beantworten, um (ganzzahligen Anteil von) x zu bestimmen.“

2) Informationswert einer Wahrscheinlichkeit.

- $p_n; n=1, \dots, N$, $\sum_{n=1}^N p_n = 1$ ^{$0 < p_n < 1$}

$$p_n = 2^{\underbrace{\lg(p_n)}_{< 0}}$$

- $\lg(p_n) = \lg(\frac{1}{p_n})$ „Informationswert von p_n “

Wie vorher:

$\lceil \frac{1}{p_n} \rceil$ lässt sich durch Dualzahl mit $\lceil \lg(\frac{1}{p_n}) \rceil + 1$ Stellen darstellen.

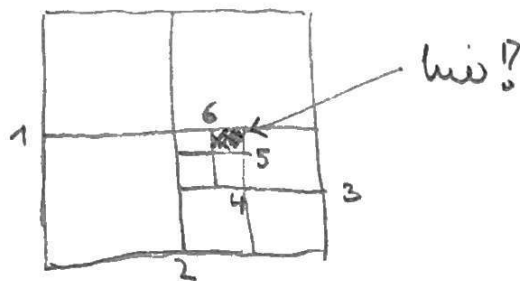
- Beispiel Schachbrett: Auf welchem Feld steht die schwarze Dame (willkürlich eingestellt)?

$$p_n = \frac{1}{64} \quad n = 1, \dots, 64$$

$$\quad \quad \quad \downarrow$$

$$\quad \quad \quad = 2^{-6}$$

- $\text{ld } p_n = 6$ = Anzahl der Fragen, um das Feld der schwarzen Dame zu bestimmen:



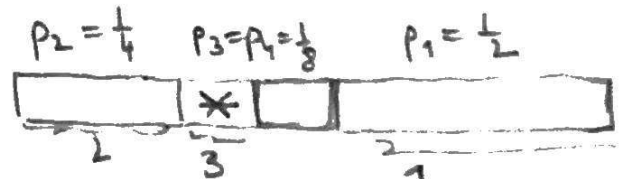
- Bei Warteschlangenbildung lassen sich im Mittel Fragen sparen, wenn man wahrscheinlichere Orte zu erst abfragt. Beispiel:

$$p_n = \frac{1}{\sum m_n}, \quad \sum_{n=1}^N p_n = 1$$

für positive ganze Zahlen m_n .

optimale Fragestrategie:
(möglichst schnell herausbekommen, wo x ist)

N = Anzahl der Fragen,



$$\langle N \rangle_{\text{opt}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3 + \frac{1}{8} \cdot 3$$

$$= -\frac{1}{2} \text{ld} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{8} \text{ld} \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{7}{4}$$

$$= -\sum_{n=1}^N p_n \text{ld}(p_n)$$

„mittler Anteil der Fragen“ oder mittler Informationswert der Verteilung. Ist ein Maß dafür, wieviel Unkenntnis mit der Verteilung verbunden ist.

3) Entropie.

Für eine Verteilung p heißt

$$S[p] = -A \sum_{n=1}^d p_n \ln p_n$$

die (Informations-) Entropie der Verteilung.
A ist eine positive Konstante. Wir wählen zuerst

$$A = \ln(2) \Rightarrow A \ln(p_n) = \ln(p_n) \\ \text{natürlicher Logarithmus}$$

Die Entropie ist ein Maß für die mit der Verteilung verbundene Unkenntnis der „Zustände“.

4) Eigenschaften der Entropie.

(i) S ist nicht negativ, $S[p] \geq 0$ für beliebige p .
($0 < p_n < 1 \Rightarrow -\ln p_n > 0 \Rightarrow S[p] \geq 0$)

Im Limit $p_n \rightarrow 0$ für $n \neq m$, $p_m \rightarrow 1 \Rightarrow$
 $S[p] = 0$.

(ii) S ist additiv. p, q unabhängige Verteilungen
zwei Größen $X, Y \Rightarrow \sqrt[p_m q_n]{p_m q_n}$ ist W dafür, dass
X den Wert X_m und Y den Wert Y_n annimmt.

$$\sum_{m=1}^{d_1} \sum_{n=1}^{d_2} P_{m,n} = \sum_{m=1}^{d_1} p_m \sum_{n=1}^{d_2} q_n = 1$$

$$S[P] = - \sum_{m=1}^{d_1} \sum_{n=1}^{d_2} P_{m,n} \ln(P_{m,n}) =$$

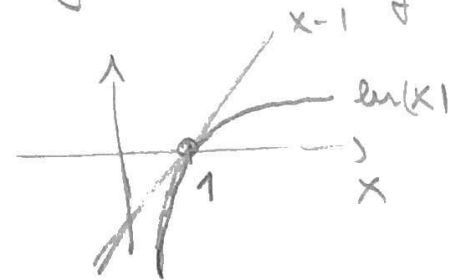
$$= - \sum_{n=1}^{\Omega_1} \sum_{n=1}^{\Omega_2} p_n q_n \underbrace{\ln(p_n q_n)}_{= \ln(p_n) + \ln(q_n)}$$

$$= S[P] + S[Q].$$

(ii) Für endliche Verteilungen mit g Zuständen ist S nach oben beschränkt durch $\ln(g)$.

Das Maximum wird für die Gleichverteilung $p_n = \frac{1}{g}$ angenommen.

Beweis: Es ist $\ln(x) \leq x - 1$



$$\Rightarrow S[P] = \sum_{n=1}^g p_n \ln\left(\frac{1}{p_n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{p_n g}\right) + \ln(g)$$

$$\leq \ln(g) + \sum_{n=1}^g p_n \left(\frac{1}{p_n g} - 1\right) = \ln(g)$$

Setzt man andererseits $p_n = \frac{1}{g}$ so folgt $S[P] = \ln(g)$.

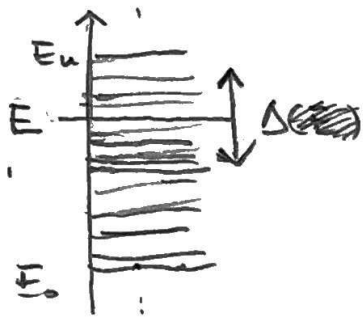
V3 Gleichgewicht

- 1) • überlässt man ein makroskopisches abgeschlossenes System lange genug sich selbst, so stellt sich erfahrungsgemäß ein Zustand ein, in dem sich die makroskopischen Größen, die das System charakterisieren (Volumen, Druck, innere Energie etc.) nicht mehr ändern. Dieser Zustand heißt thermisches Gleichgewicht.

- Statistiken betrachtet: Eine bestimmte statistische Verteilung stellt sich ein.
- Erfahrung: Gleichgewichtszustände sind Zustände maximalen Unwissens, auf dem Weg ins Gleichgewicht nimmt die Entropie also zu.

Thermodynamische Entropie.

- 2) Ein abgeschlossenes Quanten system in einem Kasten (Volumen V). System hat dann diskrete Eigenwerte E_n .



$g = g(E, N, V) =$ Unzahl der Zustände im Intervall Δ um E

$$= \underbrace{\Omega(E, N, V)}_{\text{Zustandsdichte}} \Delta$$

4
Zustandsdichte

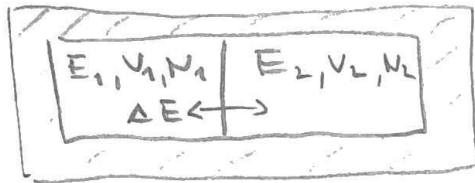
Erfahrung: System verhält sich als ob die Zustände im Intervall $\Delta(E)$ gleich wahrscheinlich wären (Wissen wir!). Dann wird aus der mit der Gleichverteilung verbundenen Entropie

$$S = S(E, N, V) = \ln(g(E, N, V))$$

$$= \ln(\Omega(E, N, V) \Delta) =: S(E, N, V)$$

die Funktion der makroskopischen Größe; die thermodynamische Entropie.

3) Temperatur



Zwei Teilsysteme, die in Gleichgewicht waren, werden in Kontakt miteinander gebracht, damit, dass sie Energie miteinander austauschen können.

$$g(E_j, V_j, N_j), \quad j = 1, 2$$

$$g_{\text{gesamt}} \approx g(E_1, V_1, N_1) \cdot g(E_2, V_2, N_2)$$

schwache WW an Grenzfläche $\rightarrow$ effektiv keine Rückwirkung

$$\Rightarrow S = \ln(g_1 g_2) = \ln g_1 + \ln g_2 = S_1 + S_2$$

$$E = E_1 + E_2 = \text{const.}$$

Wenn Gleichgewicht stellt sich ein durch Änderung von E_1 (Energie fließt von einer Seite zur anderen). Im Gleichgewicht:

$$\partial_{E_1} (S(E_1, V_1, N_1) + S(E - E_1, V_2, N_2)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial_{E_1} S(E_1, V_1, N_1) = \partial_{E_2} S(E_2, V_2, N_2)$$

Gleichgewichtsbedingung

Gleichgewicht herrscht, wenn die Größe

$$\frac{1}{T} = \partial_E S(E, V, N)$$

in beiden Teilsystemen denselben Wert annimmt
T heißt Temperatur des Systems

Analog für den Fall, wenn man Volumenänderungen oder Teilchenaustausch betrachtet:

$$\left| \frac{P}{T} = \partial_V S(E, V, N) \quad , \quad -\frac{\mu}{T} = \partial_N S(E, V, N) \right|$$

p ist der Druck und μ das chemische Potential.

4) Thermodynamik.

Löse $S = S(E, V, N)$ nach E auf und setze Ergebnis für E ein: $S = S(E(S, V, N), V, N)$.

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{T} \partial_S E \quad , \quad 0 = \frac{1}{T} \partial_V E + \frac{P}{T} \quad , \quad 0 = \frac{1}{T} \partial_N S - \frac{\mu}{T}$$

$$\Rightarrow (T, -P, \mu) = (\partial_S, \partial_V, \partial_N) E(S, V, N)$$

"Thermodynamik". Die immer Energie E heißt das thermodynamische Potential der mikroskopischen Ensemble.

Wie wir gesehen haben wird die Thermodynamik, die die Beziehungen zwischen makroskopischen Größen beschreibt durch eine mikroskopische Größe, die Zustandsdichte $\Omega(E, N, V)$ bestimmt.
am QM